

# 1 Théorème des restes chinois

## 1.1 Problème

Une bande de 17 pirates possède un trésor constitué de pièces d'or de valeur égale. Ils projettent de se les partager équitablement, et de donner le reste au cuisinier chinois. Celui-ci recevrait alors 3 pièces. Mais les pirates se querellent, et six d'entre eux sont tués. Un nouveau partage donnerait au cuisinier 4 pièces. Dans un naufrage ultérieur, seuls le trésor, six pirates et le cuisinier sont sauvés, et le partage donnerait alors 5 pièces d'or à ce dernier. Quelle est la fortune minimale que peut espérer le cuisinier s'il décide d'empoisonner le reste des pirates ?

## 1.2 Pas à pas

### Etape 1 : Seulement deux 'moments'

#### Premier problème

Une bande de 17 pirates possède un trésor constitué de pièces d'or d'égale valeur. Ils projettent de se les partager également, et de donner le reste au cuisinier chinois. Celui-ci recevrait alors 1 pièce. Dans une tempête 14 pirates meurent, il n'en reste plus que trois. Il se partagent les pièces et il n'en reste plus aucune pour le cuisinier.

- Avez vous une idée du nombre total minimal de pièces ?
- Ecrivez le sous forme de division euclidienne (avec quotient et reste)
- Si à la place de n'avoir qu'une pièce le cuisinier avait au départ deux pièces ? (trois pièces ? ,...)

#### Deuxième problème (très similaire au premier mais moins facile..)

Une bande de 17 pirates possède un trésor constitué de pièces d'or d'égale valeur. Ils projettent de se les partager également, et de donner le reste au cuisinier chinois. Celui-ci recevrait alors 0 pièce. Dans une tempête 14 pirates meurent, il n'en reste plus que 3. Il se partagent les pièces et il en reste 1 pour le cuisinier.

- Avez vous une idée du nombre minimal total de pièces ?

#### Troisième problème : en utilisant les deux

Une bande de 17 pirates possède un trésor constitué de pièces d'or d'égale valeur. Ils projettent de se les partager également, et de donner le reste au cuisinier chinois. Celui-ci recevrait alors 3 pièce. Dans une tempête 14 pirates meurent, il n'en reste plus que 3. Il se partagent les pièces et il en reste 1 pour le cuisinier.

- En utilisant les informations des deux derniers exercices Avez vous une idée d'un nombre possible total de pièces (pas forcément minimal) ?

A la fin de cette étape l'idée c'est d'avoir remarqué que

- On sait trouver la solution quand les restes de pièces d'or sont zéro et un
- Quand on a cette solution il suffit de la multiplier par  $K$  pour avoir le nombre de pièces d'or 0 et  $K$ .
- Quand on a les solutions de 0 et  $a$  et de  $b$  et 0 si on les additionne on a une solution pour  $a$  et  $b$ .

#### Pour aller plus loin

Comment trouver la solution minimale du Troisième problème ?

### Etape 2 Passage en trois 'moments'

En vous inspirant de l'étape 1 comment pensez vous pouvoir gérer un problème à trois moments ?

### Etape 3 Généralisation à $n$ moments

En vous inspirant de l'étape 2 comment pensez vous gérer un problème à  $n$  moments ?

## **Etape 4 Solution du problème initial**

### **Pour aller plus loin**

Nous avons trouvé un nombre de pièces mais est-on sûr qu'il s'agisse du nombre minimal de pièces ? Comment le trouver ? (Reprenez les étapes en cherchant cette fois non pas une solution mais un nombre minimal de pièces.) Dans le problème initial quels sont les nombres de pirates pour lesquels on peut deviner le nombre de pièces d'or que le cuisinier aurait, sans en savoir plus sur le nombre de pièces ?