

# Sujets MathEnJeans 2017-2018

Amic Frouvelle

## 1 Se répartir sur un cercle

On dispose de  $N$  points sur un cercle. À chaque étape, chaque point se positionne sur le cercle au milieu de l'arc délimité par ses deux voisins et contenant ce point (on suppose par exemple que toutes les nouvelles positions sont calculées en même temps). On cherche à savoir comment se comporte le système au bout d'un grand nombre d'étapes. On n'hésitera pas à faire des simulations numériques!

Questions non exhaustives :

- Quelles sont les configurations « qui ne bougent pas » ?
- Que se passe-t-il pour  $N = 3$ , pour  $N = 4$  ?
- Est-on certain que les points vont rester « dans le même ordre » ?
- Que se passe-t-il quand on démarre d'une configuration où tous les points sont initialement très proches ? Ou répartis aléatoirement ? Peut-on faire des conjectures par une étude numérique ?
- Comment mesurer le fait que les points se « répartissent » bien ? Peut-on mesurer à quelle vitesse cela se passe ?
- Variantes : Que se passe-t-il si on décide que chaque point se positionne à tour de rôle (par exemple dans l'ordre du cercle) plutôt que simultanément ? Ou si on tire au hasard à chaque fois celui qui se repositionne ? Ou si on suppose que le point se repositionne au milieu de l'arc qui joint le point lui-même au point suivant ?
- ...

## 2 Du jonglage aléatoire

On dispose de  $b$  balles. On appelle instants les moments (régulièrement espacés dans le temps) où on peut lancer les balles. On dit qu'on fait un lancer de type  $d$  si la balle retombe et est relancée au bout de  $d$  instants. Par exemple si on ne fait que des lancers de type 3, on jongle à trois balles. Si on n'a pas de balle à un instant donné, on dit qu'on fait un lancer de type 0.

On cherche à jongler de manière aléatoire, par exemple avec la méthode suivante : à chaque instant où on a une balle, on tire un nombre  $d$  au hasard entre 1 et  $d_{\max}$ , et si on peut faire un lancer de type  $d$  (au sens où on n'aura pas de balle à lancer dans  $d$  instants), on le fait, sinon on retire un nombre jusqu'à ce que l'on puisse faire un bon lancer.

On cherche à faire des statistiques sur les types de lancers. On n'hésitera pas à faire des simulations numériques!

Questions non exhaustives :

- Peut-on calculer la moyenne des types de lancer ?
- Pour  $b$  et  $d_{\max}$  petits, (par exemple  $b = 3$  et  $d_{\max} = 4$ ), peut-on calculer la proportion de lancers de type 0 ? de type 1 ? ... de type  $d_{\max}$  ?
- Peut-on faire les mêmes choses si on change la façon de tirer au hasard, par exemple si on interdit les lancers de type 2, ou si on décide que les lancers longs doivent être moins probables ?
- Variante plus aléatoire, avec des temps de lancers aléatoires : on ne suppose plus que les instants de lancer sont réguliers, mais à chaque fois qu'on a une balle dans la main, on décide de la lancer au hasard pour une durée  $t \in [0, t_{\max}]$ . On regarde ensuite les instants où on a lancé les balles, et on peut alors dire de quel type de lancer il s'agissait, en fonction du nombre d'instants entre le moment où on l'a lancée et celui où on l'a relancée. Peut-on alors donner la moyenne du type des lancers ? La proportion des lancers de type 1, 2, etc. ?
- ...