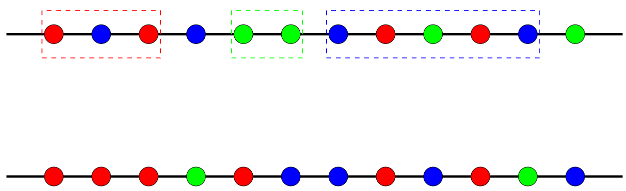
Sujets

proposés par Paul Dorbec pour le collège Villey-Desmeserets,
les lycées Malherbe et Jean Rostand

Caen, 2024

1 Des colliers de perles

Madame D. a un collier de perles de couleur, de k couleurs différentes. On trouve dans la figure ci-dessous $k = 3$ couleurs : rouge, vert et bleu. Ce collier est dit *segmentable* s'il est possible de couper des morceaux de collier de façon à avoir pour chaque couleur un morceau dont les deux extrémités sont de cette couleur. (Ces morceaux de colliers doivent bien sur être disjoints).



Exemple de chaîne segmentable (en haut) et non-segmentable (en bas)

Madame D. n'aime pas trop qu'on découpe son collier, mais elle aime avoir un collier très long. Nous souhaitons aider Madame D. Étant donné un nombre de couleurs de perles au départ, combien peut-on mettre de perles dans un collier au maximum sans que le collier soit segmentable ? (on essaye d'équilibrer le nombre de perles de chaque couleur, bien sur !) Dans notre exemple, il y a un collier non-segmentable avec 6 perles rouges, 4 perles bleues et 2 perles vertes. En n'utilisant que deux couleurs, on se rend compte par exemple qu'il est très difficile de créer un collier avec 5 perles rouges et 5 perles bleues qui soit non-segmentable. Serait-ce impossible ?

Mais alors, **pour quels nombres de perles de chaque couleur existe-t-il des colliers non-segmentables ?** On pourra commencer par se poser la question dans le cas où il y a autant de perles de chaque couleur. On pourra aussi faire varier le nombre de couleurs. On pourra enfin se demander ce qui change si l'on ferme le collier.

2 Codage et décodage

Dans ce problème, on va s'intéresser à des questions de codage et de décodage de permutation. On appelle une permutation de longueur n un mélange des nombres de 1 à n. Vous connaissez sans doute plein de permutations de taille 9, ce sont les lignes de sudoku. Voici un exemple de permutation de longueur 9 et son codage

$$3\ 1\ 8\ 6\ 2\ 5\ 7\ 9\ 4 \qquad \longrightarrow \qquad 0\ 0\ 1\ 2\ 3\ 1\ 1\ 1\ 4$$

— Quels sont les codes qui se décodent ? Quels critères permettent de déterminer les codes qui correspondent vraiment à une permutation ? (plus grand chiffre, nombre de 0, plus grand nombre d'apparition d'un même chiffre, ...)
— À quelles permutations correspondent un code donné ? Existe-t-il plusieurs façons de le décoder ? Quel est le code qui correspond au plus grand nombre de permutations ?

3 Les basketteurs : Décroiser les élastiques

Plusieurs joueurs de basket sont face à autant de paniers, chacun devant viser un panier en particulier. S'ils lancent tous en même temps, les balles s'entrechoquent et tout le monde rate. Il faut donc changer la place des joueurs pour décroiser les tirs.

ou

Sur une planche, vous avez deux colonnes de clous. Les deux colonnes ont le même nombre de clous. Des élastiques relient chaque clou de la colonne de gauche à un clou de la colonne de droite. On va s'intéresser au nombre de croisements entre ces élastiques.

— Quel est le plus grand nombre de croisements possibles entre les élastiques quand les clous sont espacés régulièrements ?
— Même question quand les clous sont placés irrégulièrement (la distance entre deux clous consécutifs sur la même colonne varie).

Étant donné une configuration de départ, on peut faire des *échanges*, chaque échange consistant à intervertir les élastiques sur deux clous d'une même colonne. On s'arrange pour ne pas emmêler les élastiques ce faisant.

On souhaite trouver le plus petit nombre d'échanges à réaliser pour défaire tous les croisements, selon la situation de départ.

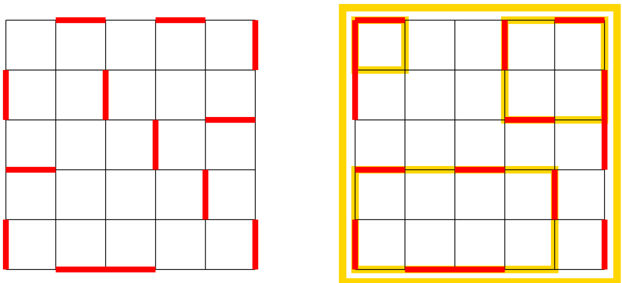
— Quelle est la pire situation de départ avec n clous par colonne ? C'est à dire celle qui nécessite le plus d'échanges pour être décroisée ?
— Si on prend en compte aussi le nombre de clous c, que peut on dire sur le nombre d'échanges ?

Ces questions peuvent à nouveau être posées sur une répartition régulière ou non.

4 Placer des allumettes

Considérons une grille. On souhaite sélectionner le plus possible d'arêtes de la grille, tout en respectant la propriété suivante :

Dans chaque rectangle de la grille, le nombre d'arêtes sélectionnées doit rester strictement inférieur au nombre d'arêtes non sélectionnées.



Exemple de choix valide (à gauche) et de situations interdites (à droite, sur les rectangles jaunes).

Étant donnée une grille de $n \times m$ cases, combien d'arêtes peut-on sélectionner au maximum tout en respectant la condition ? On pourra commencer par étudier les grilles de petites tailles, puis chercher à défaut de valeurs exactes des bornes sur le nombre d'arêtes en fonction de n et m.

Bonnes recherches !