

Les robots enchaînés !

MATh.en.JEANS

2018-2019

Depuis quelques temps, des robots se retrouvent enchaînés à une position fixe et ne peuvent plus se déplacer. Cependant, l'un d'eux, *Dolores* - que l'on peut voir sur la Figure 1 - pourrait libérer tous les autres car un coffre-fort contenant les clés est situé à ses pieds. Malheureusement, celui-ci est fermé et une pièce est nécessaire pour l'ouvrir...



FIGURE 1 – Dolores

Votre objectif est donc de faire parvenir au moins une pièce à Dolores afin de rendre leur liberté aux robots. Pour cela, vous disposez d'un budget de x pièces. Malheureusement, vous ne pouvez pas donner l'argent directement à Dolores car elle est située sur un terrain très dangereux et il n'est pas possible de lui faire parvenir la pièce à distance.

En revanche, votre ami Adrien vous propose de vous prêter son drone durant une heure afin de faire parvenir l'argent à Dolores. Par malchance, ce drone est un peu fou, vous ne le contrôlez absolument pas. Quand vous donnez x pièces au drone, il les distribue à tous les participants comme il le souhaite (et bien souvent il oublie d'en donner à Dolores). Par exemple, dans la Figure 2, voici comment le drone a réparti les 11 pièces. On observe que Dolores n'a rien reçu. Dans ce cas, elle ne peut pas ouvrir le coffre et vous allez devoir l'aider à récupérer une pièce.



FIGURE 2 – Répartition des 11 pièces : Dolores n'a rien reçu !

Heureusement, vos robots à vous sont plutôt coopératifs : vous pouvez demander à l'un d'entre eux de donner exactement deux pièces de son budget à un autre, moyennant un coût d'une pièce. Par exemple, si le robot *Teddy* dispose initialement de quatre pièces, il peut en reverser une à *Bernard* qui n'en a que deux. Après cette transaction,

il ne reste à Teddy plus que deux pièces mais Bernard en a désormais trois. Si votre robot a zéro ou une pièce, il ne peut donc pas vous aider !

Cependant, compte tenu du terrain accidenté, toutes les paires de robots ne peuvent pas faire de transaction. Les paires de robots pouvant s'échanger de l'argent sont représentées par un dessin où les robots pouvant communiquer entre eux sont reliés par un trait. Voici un exemple sur la Figure 3 suivante :

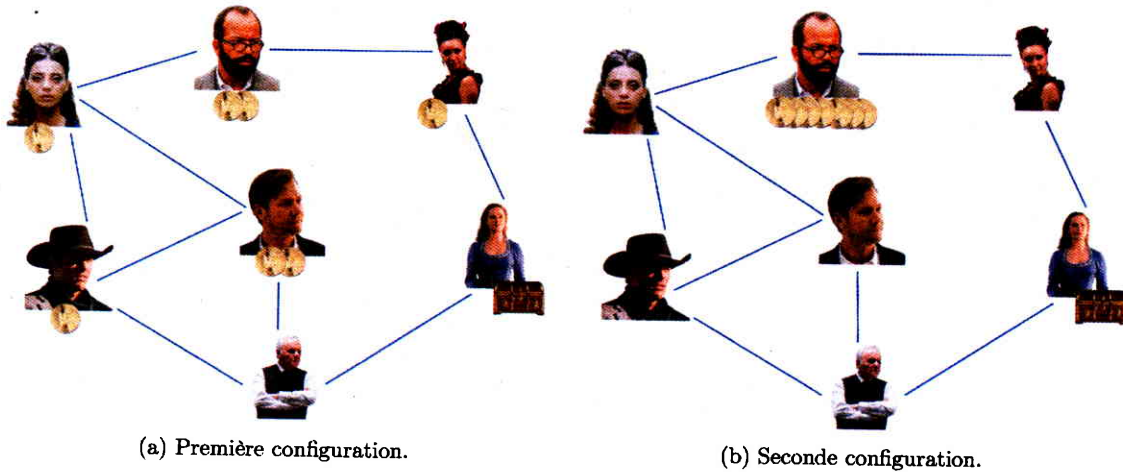


FIGURE 3 – Deux configurations à 7 pièces.

Votre rôle est de trouver une séquence de transactions à réaliser permettant à Dolores de récupérer une pièce.

1. Pouvez-vous aider Dolores dans le cas précis des Figures 3a et 3b ?
2. De manière générale, de combien de pièces a-t-on besoin pour que, quelque soit la configuration des robots et quelque soit la distribution de l'argent, Dolores arrive toujours à récupérer une pièce.
3. En dessous de combien de pièces est-on sûr que Dolores ne pourra pas toujours trouver une solution ?
4. Plus particulièrement, on se posera ces même questions pour chacune des familles de configurations présentes sur la Figure 4.

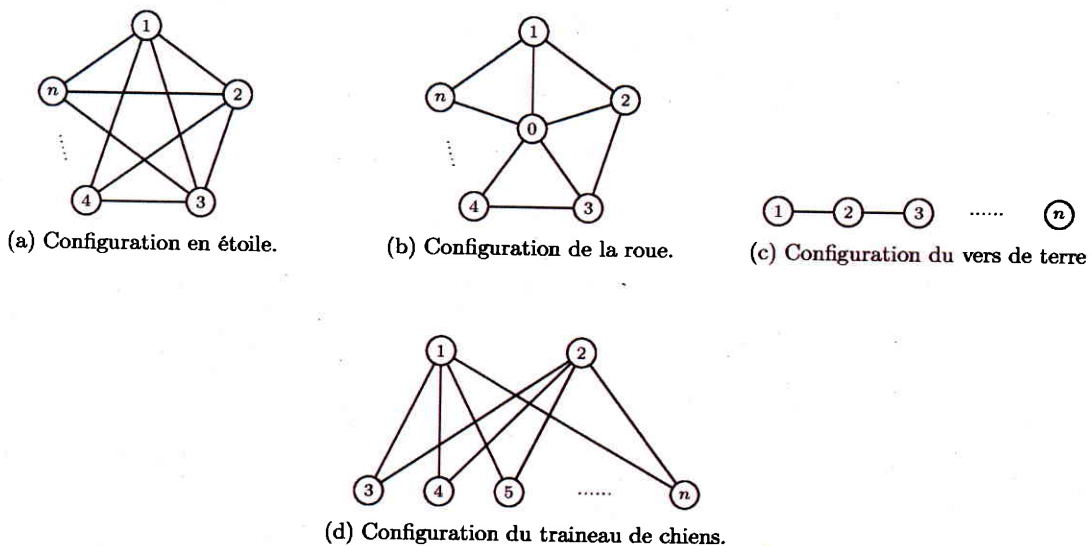


FIGURE 4 – Quelques familles de configurations .

5. Proposez de nouvelles familles de configurations que vous pouvez étudier.