

Sujet pour MATH.en.JEANS

Emmanuel Militon

September 16, 2024

Sauts de puce

Une puce se déplace sur une table en effectuant des sauts. On repère la position de la puce sur la table à l'aide d'un nombre dans l'intervalle $[0, 1]$. On sait exactement comment se déplace la puce : on a une fonction $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue telle que, si la puce se trouve en une position x à un instant donné, elle se trouvera en position $f(x)$ à la fin de son saut suivant.

On dira que la puce a une trajectoire périodique de période $n \geq 1$, si après n sauts, elle revient pour la première fois à sa position initiale. Elle répétera alors indéfiniment cette même séquence de n sauts.

Questions pour commencer

On commence par étudier le cas où f est l'application suivante.

$$f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$
$$x \mapsto \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x & \text{si } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Pour quelles positions initiales la puce a-t-elle une trajectoire périodique de période 1, 2, 3, 4, 5 et $n \geq 5$ en général ? Si on lâche au hasard la puce sur la table, ses positions ultérieures auront-elles plutôt tendance à se répartir équitablement sur toute la table ou, à l'inverse, restera-t-elle la plupart du temps sur un petit espace de la table ?

Questions pour poursuivre

Peut-on trouver $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue de sorte que la puce a des trajectoires périodiques de période 2 mais pas de trajectoire périodique de période 3 ? ou encore de sorte que la puce a des trajectoires périodiques de période 3 mais pas de trajectoire périodique de période 2 ? Même question avec des périodes p et q quelconques.