Enseignantes: Cécile Chipot, Hélène Cochard - Lycée Blaise Pascal Orsay
Chercheuse: Cecilia D'Errico, LMO Paris-Saclay - derricocecilia@gmail.com

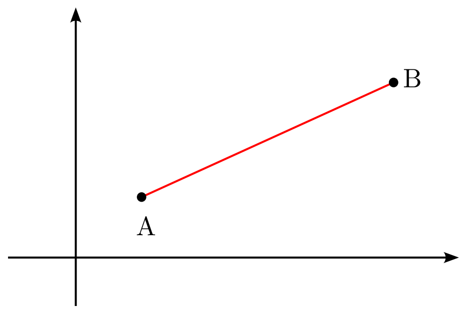
Géodésiques.

Soient A et B deux points dans un espace χ. La *géodésique* entre A et B est le chemin le plus court dans l'espace χ entre le point A et le point B.

Comme vous l'avez peut-être remarqué, la définition des géodésiques proposée ci-dessus est assez vague. Il y a une bonne raison à cela : selon l'espace χ et la mesure de longueur considérés, les géodésiques peuvent avoir des aspects très différents. Voyons quelques exemples à ce sujet.

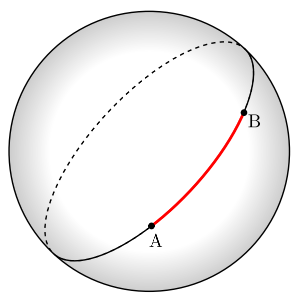
Géodésiques dans le plan cartésien

Dans le plan cartésien, c'est très simple. Le plus court chemin entre deux points A et B dans le plan cartésien χ est le segment entre A et B.

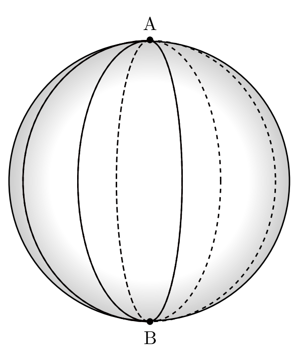


Géodésiques sur la sphère

Supposons que A et B soient deux points non antipodaux sur la sphère, qui est précisément notre espace χ. Construisons l'unique grand cercle (un cercle de rayon maximal, donc égal à celui de la sphère) qui passe entre ces deux points. On obtient ainsi deux arcs allant de A à B et on choisit le plus court : c'est la géodésique.



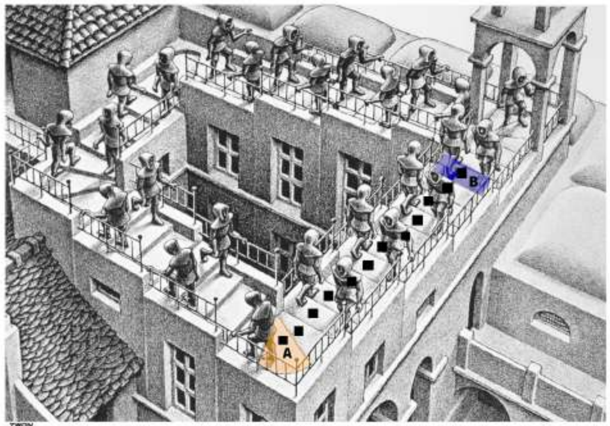
Si, par contre, A et B sont aux antipodes, il existe une infinité de grands cercles passant par A et B et donc une infinité de géodésiques : les arcs de toutes ces infinies géodésiques.



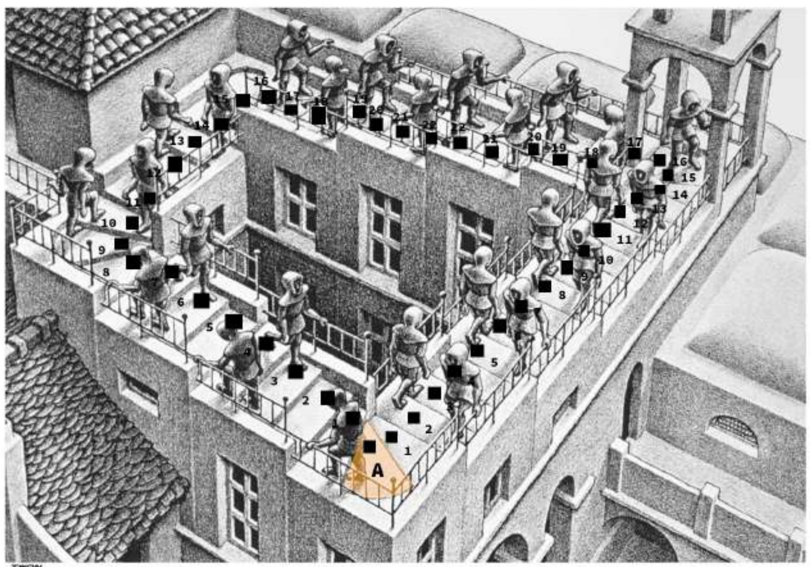
Géodésiques sur l'escalier d'Escher

Soit A et B deux marches de l'escalier d'Escher, que est notre espace χ, et que la distance qui les sépare soit le nombre minimum de pas à faire (un pas par marche) pour aller de l'une à l'autre.

Sur cette image, la géodésique entre les marches A et B est représentée. Elle a longeur: 11 marches.



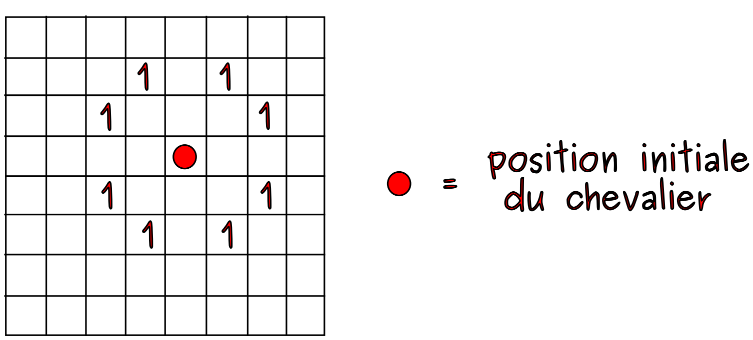
Sur cette image, j'ai fixé le point A et j'ai inscrit sur chaque marche le nombre de pas nécessaires pour s'y rendre à partir de A.



Géodésiques sur l'échiquier

On dessine un échiquier classique 8×8 et on place un cavalier en position centrale. On s'intéresse aux géodésiques du cavalier, c'est-à-dire aux chemins qui font le minimum de pas nécessaires au cavalier pour aller d'une case à l'autre. Les pas du cavalier sont de 2 dans un sens et de 1 dans l'autre.

- Complétez le schéma ci-dessous en inscrivant dans chaque case le nombre de pas nécessaires au cavalier pour l'atteindre.



- Une fois ce schéma réalisé, considérez n'importe quelle case de l'échiquier et reconstituez une géodésique (c'est-à-dire un chemin avec un nombre minimal de pas) empruntée par le cavalier pour s'y rendre.
- Combien de géodésiques existent entre la position initiale du cavalier et une case marquée 1 ?
- Combien de géodésiques existent entre la position initiale du cavalier et une case marquée 2 ?
- Combien de géodésiques existent entre la position initiale du chevalier et une case marquée 3 ?
- Dessinez un échiquier plus grand, faites le diagramme et répondez à la même question pour une case marquée 4, 5,... etc. Faites une hypothèse sur le nombre de géodésiques existant entre la position initiale du cavalier et une case marquée $n \in \mathbb{N}$. Essayez de prouver cette hypothèse.

Passons maintenant aux généralisations.

<u>Autres pièces de jeu.</u>

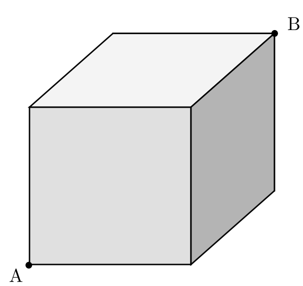
- Faites la même analyse pour les autres pièces du jeu : le roi, la reine, le fou noir, le fou blanc, la tour, le pion. Quelles sont les pièces qui peuvent atteindre chaque case de l'échiquier ? Lesquelles ne le peuvent pas ?
- En faisant la moyenne de tous les chiffres du diagramme pour chaque pièce, on obtient une mesure de la vitesse d'une pièce. Êtes-vous d'accord ? Si oui, faites-le et jugez qui est la pièce la plus rapide et la plus lente.

<u>Des cavaliers différents.</u>

- Supposons maintenant que le cavalier fasse un pas de 3 dans une direction et de 6 dans l'autre. Tracez le diagramme sur un échiquier suffisamment grand pour être sûr de ce qui se passe. Ce cavalier atteint-il toutes les cases de l'échiquier ?
- Prenons maintenant un cavalier qui se déplace de k dans une direction et de m dans l'autre. Quelle condition les nombres k et m doivent-ils remplir pour que le cavalier atteigne toutes les cases de l'échiquier ? Trouvez un critère et démontrez-le. Faites des dessins illustratifs.
- Pour les valeurs de k et m qui empêchent le cavalier d'aller partout, quelles sont les cases qu'il peut atteindre ? Quelles sont celles qu'il ne peut pas atteindre ? Trouvez un critère et démontrez-le. Faites des dessins illustratifs.

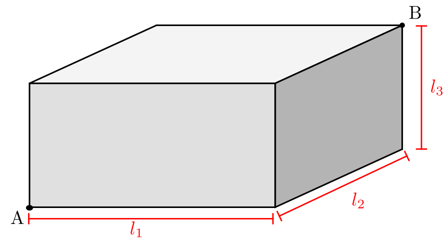
Géodésiques sur les solides

Voici votre sujet de recherche : les géodésiques sur les solides les plus célèbres. Commencez par le cube : trouvez la ou les géodésiques entre les vertices opposés, comme le montre le dessin ci-dessous. Quelle est leur longueur ?



Essayez maintenant de généraliser votre résultat : construisez la ou les géodésiques sur un cube de côté 1 entre deux points A et B quelconques.

Généralisez encore votre résultat : quelle est la géodésique entre les vertices opposés du parallélogramme droit de taille l_1, l_2, l_3 ? Qu'est-ce qui changerait si nous n'avions pas un parallélogramme droit mais un parallélogramme oblique ?



Vous voilà parti dans votre quête. Je vous recommande d'aller plus loin. Considérez un autre solide de Platon (vous souvenez-vous de ce que c'est ? sinon, faites une recherche) et construisez la géodésique entre toutes les paires de sommets de chaque solide de Platon. Combien y a-t-il de paires de sommets ? Quelles sont les longueurs de ces géodésiques ? À l'aide de papier ou de carton, construisez des modèles des solides de Platon sur lesquels vous avez tracé ces géodésiques.