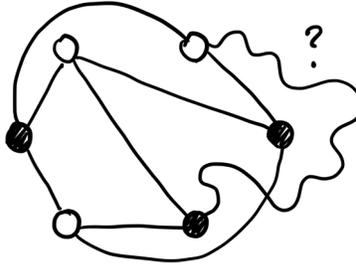


## Un problème non résolu.

Je vais vous présenter un problème difficile qui n'a toujours pas été résolu par les mathématiciens. Le problème est le suivant.



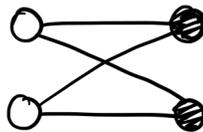
Vous êtes architecte et vous êtes chargé de construire une usine. Cette usine abrite  $m \in \mathbb{N}$  machines produisant chacune un type de biscuit différent. En outre, l'usine a besoin de  $s \in \mathbb{N}$  unités d'assemblage qui fusionnent ces biscuits en paquets multi-saveurs. Chaque machine doit livrer les biscuits à chaque unité d'assemblage par l'intermédiaire d'une bande de transport. Cependant, il est très compliqué et coûteux de fabriquer des bandes de transport qui se croisent, et vous essayez donc de l'éviter à tout prix. Voici donc la question.

Étant donné les nombres  $m$  et  $s$ , comment placer les machines, les unités d'assemblage et les bandes de transport de façon à ce que les bandes ne se croisent pas, ou, si elles doivent se croiser, de façon à ce que le nombre de croisements soit minimal ? Quel est alors ce nombre minimal de croisements ?

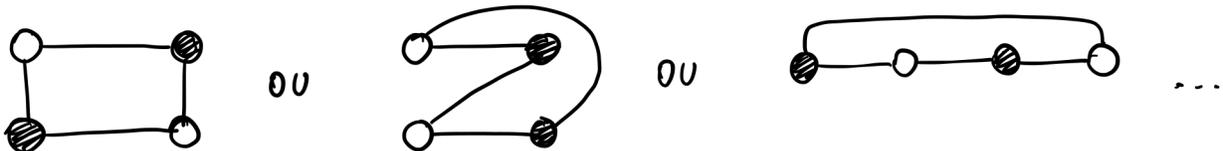
Par exemple, si vous disposez d'une machine et d'une unité d'assemblage, c'est facile.



Si vous avez 2 machines et 2 unités d'assemblage, cette configuration n'est pas optimale



Mais il est toujours possible de ne pas faire de croisements du tout :



Voici un guide pour commencer vos recherches. Bien entendu, vous êtes libre de ne pas le suivre et de suivre votre propre voie.

- Étudiez le cas spécifique où le nombre de machines est égal au nombre d'unités d'assemblage :  $m = s = n$  pour de petites valeurs de  $n = 1, 2, 3, 4$ .
- Étudiez un autre cas spécifique, celui où  $m = 1$  et  $s = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$
- Qu'en est-il de  $s = 1$  et  $m = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$  ?

- Étudiez le cas  $m = 2$  et  $s = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$
- Étudiez le cas  $m = 3$  et  $s = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$
- Si vous fixez  $m$  et augmentez  $s$ , comment pensez-vous que le nombre minimal de croisements changera ? Formulez une hypothèse et essayez de la prouver. Attention : vous ne pouvez peut-être pas dire exactement de combien ce nombre augmente ou diminue, mais vous pouvez donner une borne supérieure à cette différence.
- Si vous inversez les valeurs de  $m$  et  $s$ , comment pensez-vous que la valeur des croisements minimaux change ? Formulez une hypothèse et justifiez-la.
- Faites un tableau contenant, pour chaque couple de valeurs de  $m$  et  $s$ , le nombre minimal de croisements que vous avez calculé jusqu'à présent et essayez de le remplir autant que possible.
- Essayez d'émettre une hypothèse sur le nombre minimal de croisements en fonction de  $m$  et  $s$ . Essayez de la prouver, au moins pour certaines valeurs spécifiques de  $m$  et  $s$ .

Remarques:

- Conservez un catalogue de tous les dessins que vous avez réalisés. Si nécessaire, commentez-les pour vous rappeler comment vous les avez construits. Gardez toujours un journal de toutes les idées que vous avez : elles peuvent être utiles plus tard, et il est facile de les oublier. Les notes que vous prenez pour vous-même doivent être compréhensibles par quelqu'un d'autre : après quelques semaines, vous serez un étranger à vos propres notes :-).
- Chaque fois que vous dessinez une image de machines  $m$  et d'unités d'assemblage  $s$  avec des croisements  $c$ , vous avez automatiquement prouvé que le nombre minimal de croisements pour les machines  $m$  et les unités d'assemblage  $s$  est plus petit que  $c$ .
- Chaque fois que vous dessinez une image de machines  $m$  et d'unités d'assemblage  $s$  avec des croisements  $c$ , vous avez automatiquement prouvé que le nombre minimal de croisements pour les machines  $m$  et les unités d'assemblage  $s$  est plus petit que  $c$ .
- Si vous parvenez à trouver un dessin sans croisements, vous avez prouvé que pour ce cas, le nombre minimal de croisements est 0.