MATh.en.JEANS 2024-2025
Enseignantes: Cécile Chipot, Hélène Cochard - Lycée Blaise Pascal Orsay
Chercheuse: Cecilia D'Errico, LMO Paris-Saclay - derricocecilia@gmail.com

Encyclopédie des visualisations de formules.

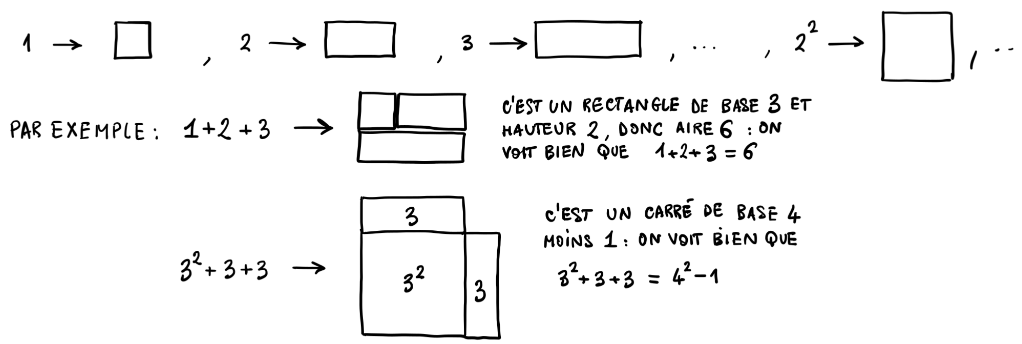
(En collaboration avec Matteo D'Errico.)

Ce projet est consacré à la construction de démonstrations graphiques de formules algébriques ou analytiques.

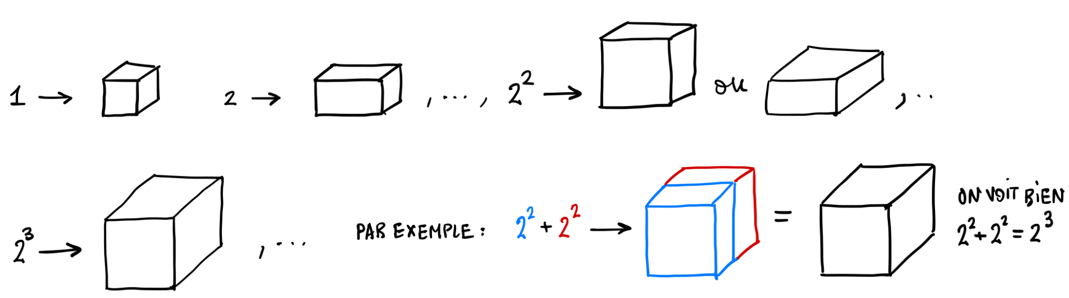
Dans un premier temps, il s'agira de démontrer graphiquement des identités que vous connaissez peut-être déjà. Dans ce cas, l'intérêt principal d'une visualisation réside dans sa beauté et dans le fait qu'un dessin est difficile à oublier : une fois que vous avez dessiné une formule, vous pourrez toujours la reconstruire. Par la suite, vous utiliserez les techniques acquises pour démontrer de nouvelles formules. Dans ce processus, le dessin sera la base de la découverte de nouveaux résultats.

Une démonstration graphique n'est rien d'autre qu'un dessin illustrant la formule en question : elle peut donc prendre plusieurs formes... Une information historique : pour les Grecs, la seule démonstration valable était la démonstration graphique ! Allez feuilleter les "Éléments" d'Euclide, le célèbre manuel antique qui a construit les fondements de la géométrie grecque : toutes les démonstrations peuvent être dessinées.

Nous nous intéressons aux formules algébriques et souhaitons simplement représenter des nombres qui s'additionnent ou se multiplient. C'est pourquoi je propose deux types de visualisation. La première est une visualisation en deux dimensions, facile à dessiner sur le papier : comme ci-dessous, nous représentons un nombre sous la forme d'une surface (rectangulaire ou pas). Cette représentation est pratique car le résultat de la multiplication de deux nombres, par exemple 2×3 peut être représenté comme l'aire d'un rectangle dont les côtés sont 2 et 3. La somme peut facilement être représentée en rapprochant les rectangles représentant les nombres en question.



De même, on peut s'appuyer sur une représentation en trois dimensions. On représente alors un nombre comme un volume. Cette représentation est pratique lorsque l'on veut dessiner la multiplication de trois nombres : par exemple $2 \times 3 \times 5$ est le volume d'un parallélépipède de côtés 2, 3 et 5.



1. Démontrer graphiquement les produits notables de degré 2 et de degré 3, c'est-à-dire
   - $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
   - $(a-b)^2 = ...$
   - $(a+b)(a-b) = ...$
   - $(a+b)^3 = ...$
   - $(a-b)^3 = ...$

MATh.en.JEANS 2024-2025
Enseignantes: Cécile Chipot, Hélène Cochard - Lycée Blaise Pascal Orsay
Chercheuse: Cecilia D'Errico, LMO Paris-Saclay - derricocecilia@gmail.com

Dessinez aussi

- $(n+1)^2 - n^2 = ...$
- et $(n+1)^3 - n^3 = ...$

Si vous connaissez déjà ou trouvez au cours de vos recherches d'autres identités intéressantes, n'hésitez pas à les ajouter à la liste !

2. Trouvez et prouvez graphiquement la formule de la somme des premiers n entiers, c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{n} k = ...$$

Faites ensuite une démonstration graphique de la somme des premiers n nombres pairs $(2+4+6+...+2n)$ e des premiers n nombres impairs $(1+3+5+...+2n+1)$. Généraliser à nouveau et trouver une preuve de la formule de la somme des premiers multiples de n d'un nombre quelconque m, c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot m = ...$$

3. Démontrer graphiquement le théorème de Pythagore.

4. Trouver et prouver graphiquement la formule de la somme des n premiers carrés :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = ...$$

Indication : une possibilité est de représenter k^2 comme un parallélépipède de hauteur 1 formé par k^2 cubes de côté 1, puis d'empiler les couches ainsi formées pour former une pyramide oblique. Enfin, on peut se demander combien de cubes il faudrait ajouter à cette pyramide pour former un cube de côté n ?

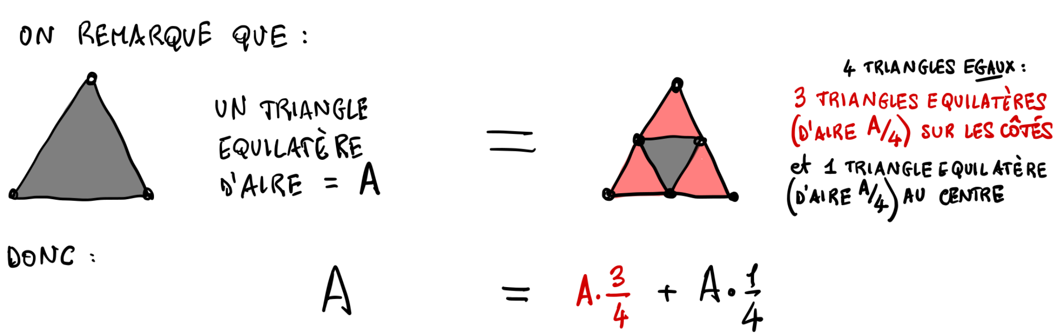
5. Essayez de généraliser la procédure obtenue pour trouver la formule de la somme des premiers n cubes, c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = ...$$

Si vous utilisez la méthode pyramidale, vous vous retrouvez à construire une hyperpyramide dans un espace à 4 dimensions : vous ne pouvez plus dessiner votre construction. Vous pouvez cependant représenter la base de chaque couche, qui est en 3 dimensions. N'abandonnez pas : faites preuve d'imagination. Si vous pouvez faire cette généralisation, lancez-vous dans la formule de la somme des puissances de m, soit

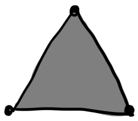
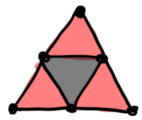
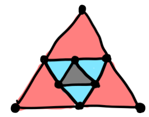
$$\sum_{k=1}^{n} k^m = ...$$

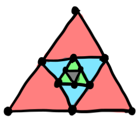
6. Je présente un argument graphique : c'est la démonstration graphique que $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{3}{4}$. Il vous reviendra ensuite de la décliner pour étudier d'autres séries géométriques.



Enseignantes: Cécile Chipot, Hélène Cochard - Lycée Blaise Pascal Orsay
Chercheuse: Cecilia D'Errico, LMO Paris-Saclay - derricocecilia@gmail.com

ON FAIT ALORS LA CONSTRUCTION SUIVANTE :

 $1 =$  $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} =$  $\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$

$=$  $\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \dots = \frac{3}{4}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n}\right) + \frac{1}{4^{n+1}}$

ON A DONC POUR CHAQUE $n \in \mathbb{N}$:

$$1 = \frac{3}{4} \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^k + \frac{1}{4^{n+1}} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right) \cdot \frac{4}{3}$$

ET SI $n \to \infty$ ON OBTIENT :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right) \cdot \frac{3}{4} = (1-0)\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

Le point clé de cet argument est qu'il est possible de diviser un triangle équilatéral en 4 triangles équilatéraux plus petits... Quelles autres figures peuvent être décomposées en une collection de plus petites copies d'elles-mêmes, et combien ? Si vous en trouvez, construisez la somme correspondante. Vous pouvez également considérer les figures tridimensionnelles.

Dans un deuxième temps, travaillez à rebours : si vous voulez représenter graphiquement une somme géométrique convergente quelconque, comment feriez-vous ?