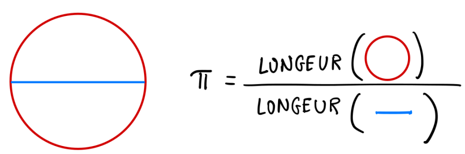
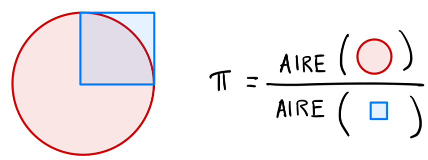
MATh.en.JEANS 2024-2025
Enseignantes: Cécile Chipot, Hélène Cochard - Lycée Blaise Pascal Orsay
Chercheuse: Cecilia D'Errico, LMO Paris-Saclay - derricocecilia@gmail.com

Approximations de π.

(En collaboration avec Matteo D'Errico.)

Le nombre π a déjà été défini par les Grecs comme le quotient de la longueur de la circonférence d'un cercle par son diamètre. On peut également dire que π est le quotient de l'aire d'un cercle par l'aire du carré construit sur le rayon.





- Convainquez-vous ou prouvez que ces deux définitions sont équivalentes. Pour prouver une équivalence, il faut procéder comme suit. Dans un premier temps, prouvez que si l'on définit π comme le quotient de la longueur de la circonférence d'un cercle par son diamètre, alors le quotient de l'aire d'un cercle par l'aire du carré construit sur le rayon est également égal à cette valeur. Puis, prouver que si l'on définit π comme le quotient de l'aire d'un cercle par l'aire du carré construit sur le rayon, alors le quotient de la longueur de la circonférence d'un cercle par son diamètre est également égal à cette valeur.

Ce sont les Grecs qui ont compris que π n'est pas un nombre rationnel, c'est-à-dire qu'il peut être exprimé comme le quotient de deux nombres entiers. En effet, π est un nombre à virgule, dont les chiffres décimaux ne se répètent jamais.

- Considérons un nombre avec une virgule qui est périodique, par exemple 125.3232323232... . Un tel nombre peut-il toujours être exprimé comme le quotient de deux nombres entiers ? Si oui, expliquez pourquoi et illustrez la méthode que vous utilisez pour obtenir le quotient en question.
- Considérons maintenant le quotient de deux nombres entiers, par exemple $\frac{22}{7}$ ou $\frac{132}{110}$. Lorsqu'il est exprimé sous forme de nombre avec une virgule, comporte-t-il une période ? Si oui, est-ce le cas pour tous les quotients de deux nombres entiers ? En réfléchissant à cette question, vous utiliserez certainement l'algorithme de division que vous avez appris à l'école primaire. Pouvez-vous nous expliquer comment fonctionne cet algorithme ? Attention, ne sautez pas cette étude de l'algorithme de la division : un bon mathématicien n'utilise jamais un algorithme ou une formule qu'il ne peut pas justifier !
- A partir de ces deux questions préliminaires, tirez des conclusions : décrivez les nombres qui sont quotients de deux nombres entiers. Que pouvez-vous dire des nombres qui ne sont pas quotients de deux nombres entiers ?

Nous abordons maintenant l'étude du nombre π. Le but de cette recherche est d'approcher sa valeur à l'aide de techniques élémentaires. Si vous le souhaitez, vous pouvez maintenant vous arrêter et réfléchir par vous-même à la manière de procéder. Attention : ce n'est pas si simple. Permets-toi donc d'y réfléchir pendant plusieurs jours. Après tout, il a fallu à l'humanité de nombreux siècles pour obtenir des valeurs précises de π...

Dans ce qui suit, j'esquisse quelques idées possibles. Vous êtes libre de les mettre en pratique, de justifier leur validité et de les généraliser autant que possible.

Approximations rationnelles.

Supposons que nous connaissions déjà la valeur de π avec une grande précision (c'est-à-dire que nous connaissons de nombreux chiffres après la virgule) :

$$\pi = 3.14159265358979323846264 33...$$

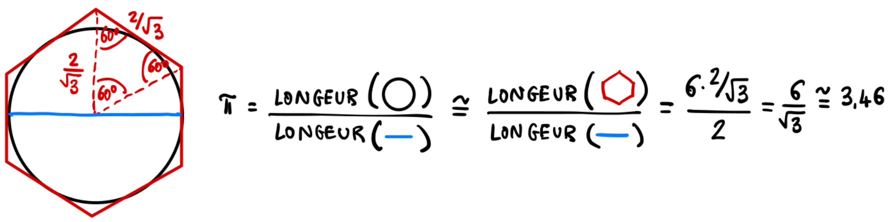
Nous nous intéressons aux approximations rationnelles de π , c'est-à-dire aux fractions dont la valeur est proche de π : vous aurez certainement remarqué que $\frac{22}{7}$ en est une. Ces approximations sont très utiles dans les calculs manuels, car calculer à la main avec des fractions est beaucoup plus facile que de calculer avec une valeur comme celle que vous voyez ci-dessus !

A vous : développez des méthodes pour obtenir des approximations rationnelles de pi. Justifiez la validité de vos méthodes. Faites une liste de toutes les fractions que vous obtenez. Étudiez chaque fraction que vous obtenez : quelle est sa précision, sa facilité de calcul ? Quelle est votre fraction préférée et pourquoi ?

Une méthode grecque.

J'illustre ci-dessous une variante de l'une des méthodes utilisées par les Grecs pour obtenir une approximation de π.

Nous circonscrivons (savez-vous ou vous souvenez-vous de ce que signifie circonscrire et inscrire ?) un polygone régulier à un cercle. Nous remarquons alors que si le polygone a beaucoup de côtés, son périmètre est très proche de la longueur du cercle. L'idée est donc la suivante : on peut obtenir une valeur approximative de π en divisant le périmètre du polygone par le diamètre. Le dessin suivant est un exemple numérique.



- Convainquez-vous de l'exemple ci-dessus. Faites des dessins d'autres cas et étudiez-les. Cette méthode vous convainc-elle ?
- Quel est le rapport entre l'approximation obtenue à partir d'un certain polygone et l'approximation obtenue à partir d'un polygone ayant un plus grand nombre de côtés ? Justifiez votre réponse.
- Trouver le périmètre du cercle régulier n circonscrit au cercle pour les premières valeurs de n : $n = 3, 4, 5, 6, ...$

Dans votre étude des questions précédentes, vous avez probablement utilisé des considérations géométriques différentes pour chaque cas. Il serait très intéressant d'avoir une formule pour le périmètre du n-gone circonscrit...

- Cherchez une formule qui donne le périmètre de l'n-gone régulier circonscrit au cercle en fonction de n (et du rayon du cercle). Si vous le pouvez, analysez-la : est-elle élémentaire ?

Construisez maintenant une méthode élémentaire (c'est-à-dire une méthode qui utilise le moins de connaissances possible) pour trouver récursivement la valeur du périmètre du 2^k-gone, pour $k = 2, 3, 4, ...$

- Trouver le périmètre du carré circonscrit au cercle (4-gone, soit 2^2-gone).
- Trouver le périmètre de l'octogone régulier circonscrit au cercle (8-gone, soit 2^3-gono).
- Trouvez une relation géométrique entre la longueur du côté du carré et celle de l'octogone. Conclure par une formule qui donne la longueur du côté de l'octogone en fonction de la longueur du côté du carré.
- En vous inspirant de vos considérations de l'étape précédente, trouvez une relation géométrique entre la longueur du côté de l'octogone et celle du 16-gone. En extraire une formule.
- Généralisez. Trouvez une formule pour la longueur du côté de 2^{k+1}-gone régulier circonscrit au cercle en fonction de la longueur du côté de 2^k-gone régulier circonscrit au cercle. 10. En utilisant les formules trouvées, obtenir des approximations successives de π. Commentez, également par rapport aux considérations que vous avez faites au début de votre recherche. Comment jugez-vous la qualité de ces approximations ?

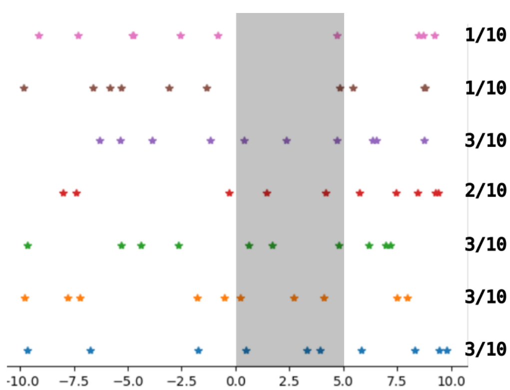
Le travail est loin d'être terminé. Voici quelques questions complémentaires.

- Cette méthode peut-elle être généralisée à partir du triangle circonscrit ?

- Cette méthode peut-elle être généralisée à partir du pentagone circonscrit ?
- Cette méthode peut-elle être généralisée à partir du n-gone circonscrit ?
- Généraliser cette méthode à partir du carré inscrit. En comparant les approximations de n ainsi trouvées avec celles obtenues à la question 10, trouver un critère qui permette de déduire combien de chiffres significatifs de l'approximation de n sont corrects à chaque itération de l'algorithme. De plus, à partir de cette même comparaison, justifier la convergence des deux séquences d'approximations de π.
- Reprendre le raisonnement de la question précedent dans le cas de la suite obtenue à partir du triangle inscrit.
- En se basant sur ce qui a été fait jusqu'à présent, développer une méthode récursive qui permet d'obtenir des approximations de π en exploitant l'aire des polygones réguliers inscrits/circoncis.
- Qu'en est-il de l'utilisation de polygones non réguliers ? Si vous trouvez que cela a un sens, lesquels ?
- Le volume de la sphère contient π. En approximant son volume avec des polytopes circonscrits (lesquels choisir ?), peut-on obtenir de bonnes approximations de π ? Si vous pensez que oui, développez une méthode qui permet d'obtenir au moins une approximation.

Une méthode probabiliste pour les informaticiens.

Commençons par un exemple. Supposons que nous puissions générer une infinité de nombres $M_1, M_2, M_3, ...$ uniformément au hasard dans l'intervalle $[-10, 10]$ et indépendants les uns des autres. Voici quelques réalisations des premiers 10 nombres $M_1, ..., M_{10}$ (sur le côté, nous avons calculé la proportion de ces nombres qui tombent dans l'intervalle $[0, 5]$, nous en aurons besoin plus tard).



Par définition, cela signifie que pour chaque nombre M_k et pour chaque intervalle $[a, b] \subset [-10, 10]$, la probabilité que M_k tombe dans cet intervalle est proportionnelle à la longueur $b - a$ dudit intervalle $[a, b]$. C'est-à-dire

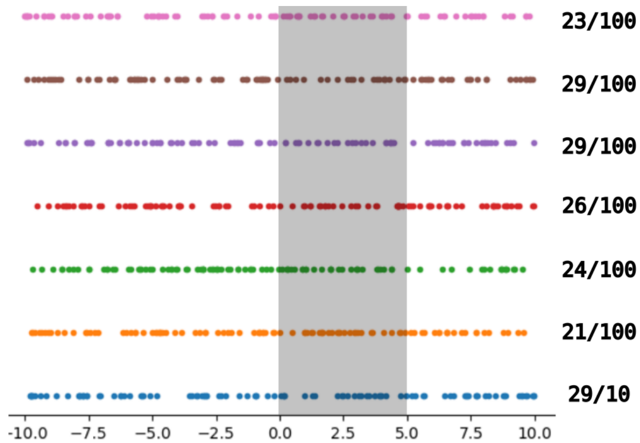
$$p_{a,b}^{-10,10} := \mathrm{P}(M_k \in [a, b]) = \frac{\text{longeur}([a, b])}{\text{longeur}([-10, 10])} = \frac{b - a}{20}$$

- Familiarisez-vous avec cette construction : si nécessaire, demandez des explications supplémentaires à l'enseignant. Qu'est-ce qui changerait si les nombres étaient distribués dans un autre intervalle, par exemple $[0, 10]$ ou dans un intervalle générique $[A, B]$? Enfin, trouvez une formule pour $p_{a,b}^{A,B}$.

Considérons maintenant le sous-intervalle $[0, 5] \subset [-10, 10]$. La probabilité qu'un nombre aléatoire M_k tombe dans ce sous-intervalle est

$$p_{0,5}^{-10,10} = \mathrm{P}(M_k \in [0, 5]) = \frac{\text{longeur}([0, 5])}{\text{longeur}([-10, 10])} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 25\%$$

Considérons maintenant les 100 premiers nombres aléatoires $M_1, M_2, ..., M_{100}$. Dans l'illustration suivante, nous voyons différentes réalisations de ces 100 premiers nombres, ainsi que la proportion de nombres tombant dans l'intervalle $[0, 5]$. Comme vous pouvez le constater, cette proportion est proche de $25\% = p_{0,5}^{-10,10}$.



Ce principe se généralise. Si nous prenons une grande quantité de nombres au hasard, la proportion de ceux qui tombent dans l'intervalle $[a, b]$ est une approximation de la probabilité qu'un nombre tombe dans cet intervalle. Autrement dit, pour tout grand i, si nous désignons par $N_1, N_2, ...$ les nombres qui tombent uniformément au hasard dans l'intervalle $[A, B]$:

$$p_{a,b}^{A,B} \approx \frac{\text{quantité de nombres parmi } N_1, ..., N_i \text{ qui tombe dans } [a, b]}{i}$$

(En principe, plus i est grand, meilleure est l'approximation). Cela nous permet également d'obtenir une approximation de la longueur de l'intervalle $[a, b]$:

$$\text{longeur}([a, b]) = p_{a,b}^{A,B}\text{longeur}([A, B]) = p_{a,b}^{A,B}(B-A) \approx \frac{\text{quantité de nombres parmi } N_1, ..., N_i \text{ qui tombe dans } [a, b]}{i}(B-A)$$

- Familiarisez-vous avec ce raisonnement. Écrivez un algorithme dans votre langage de programmation préféré qui génère des nombres aléatoires et les utilise pour approximer la longueur d'un intervalle à votre convenance.

Vous êtes maintenant prêt à généraliser ce principe et à développer votre propre algorithme pour l'approximation de π. Pour vous aider, je vous donne juste deux indications.

- Le cercle étant une forme géométrique qui vit dans un monde bidimensionnel, vous trouverez probablement utile de pouvoir considérer des valeurs aléatoires sur un plan. Voici un exemple de la manière dont les valeurs aléatoires peuvent être générées en deux dimensions. Si $X_1, X_2, ...$ et $Y_1, Y_2, ...$ sont des nombres aléatoires dans l'intervalle $[0, 1]$, alors la séquence de valeurs bidimensionnelles $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ...$ contient des points uniformément aléatoires dans le carré $[0, 1] \times [0, 1]$. De même, nous pouvons créer des points aléatoires dans un cube $[0, 1]^3$...

- La valeur π est contenue dans l'aire du cercle, le volume de la sphère, la longueur de la circonférence, l'aire de la surface de la sphère,... . Choisissez parmi ces quantités celle qui vous convient, faites-en une approximation à l'aide d'une méthode similaire à celle illustrée ci-dessus et extrayez une valeur approximative de π.