Enseignantes: Cécile Chipot, Hélène Cochard - Lycée Blaise Pascal Orsay
Chercheuse: Cecilia D'Errico, LMO Paris-Saclay - derricocecilia@gmail.com

Étude d'une énigme arithmétique.

Une prison abrite 100 prisonniers, chacun dans une cellule individuelle, numérotée de 1 à 100. À l'occasion du mariage du prince, le roi décide de gracier certains prisonniers. Ne voulant pas décider personnellement qui seront les heureux élus, il décide de suivre une méthode algorithmique si alambiquée qu'il est lui-même incapable de savoir qui sera libéré et qui ne le sera pas. Ainsi, pendant la nuit, alors que tous les prisonniers sont endormis, il entre avec un passe-partout et donne des tours aux cellules, comme suit. D'abord, il donne un tour de clé à toutes les cellules, les ouvrant toutes. Puis il recommence en donnant un autre tour aux cellules multiples de 2, c'est-à-dire les nombres $2, 4, 6, 8, 10, ..., 100$, qui sont alors fermées. On fait ensuite de même avec les cellules multiples de 3, c'est-à-dire les nombres $3, 6, 9, 12, ..., 99$. Il continue ensuite avec les multiples de 4, c'est-à-dire $4, 8, 12, 16, ..., 100$ et ainsi de suite avec les multiples de tous les nombres $5, 6, 7, ...$ jusqu'à 100.

- Combien et quels prisonniers seront libérés, et pourquoi ? Commencez par rédiger à la main une liste des dix premiers prisonniers.
- Et si au lieu de 100 prisonniers, nous avions 1000 prisonniers ?
- Et s'il y avait n prisonniers, où $n \in \mathrm{N}$ est un nombre entier positif quelconque ?
- Étudier la fonction qui associe à n le nombre de prisonniers ainsi libérés dans une prison de n cellules.

Maintenant que nous avons étudié en détail le cas de base, nous sommes libres d'étudier les généralisations. Voici un premier axe de recherche :

- Et si, au lieu de donner des tours de clé à des multiples de tous les nombres, le roi ne donnait des tours de clé qu'à des multiples de nombres premiers, qu'est-ce que cela changerait ? Ou seulement aux multiples des nombres impairs, ou seulement aux multiples des nombres pairs ? Si l'une de ces généralisations vous semble intéressante, lancez-vous dans son étude.

Voici un deuxième axe de recherche :

- Supposons que le roi donne, comme dans l'énigme originale, un tour de clé à chaque multiple de chaque nombre. Mais imaginons que le verrou ait besoin d'exactement 2 tours de clé pour être ouvert, soit
  - 0,3,6,9,... tours : fermé
  - 1,4,7,10,... tours : fermé
  - 2,5,8,11,... tours : ouvert

  Soit $l \in \{1, 2, ..., n\}$ le numéro de la cellule d'un prisonnier. Quel critère ce numéro doit-il satisfaire pour que le prisonnier soit libéré ou reste incarcéré ? Quels et combien de prisonniers seraient libérés dans une prison de n cellules?
- Supposons que les verrous de prison nécessitent k tours pour être ouverts, et que l est le numéro de la cellule d'un prisonnier. Quel critère doit satisfaire l pour que le prisonnier soit libéré ou reste prisonnier ?
- Écrire un programme qui calcule la fonction

  $n \in \mathrm{N} \mapsto f_k(n) =$ nombre de détenus libérés dans une prison de n cellules avec les verrous a k tours de clé

  et représenter graphiquement f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 sur un domaine suffisamment grand de votre choix. Commentez les caractéristiques de ces fonctions.