Compter le nombre d'occurrences de triangles dans des mosaïques

MATH.en.JEANS

Octobre 2024

Intéressons nous à la figure 1 qui contient 4 dessins (en forme de carré) de tailles 1, 2, 3 et 4. Combien y-a-t-il de rectangles, toutes tailles confondues, dans le premier dessin ? Même question pour les autres dessins. Si on note par n la taille du dessin, existe-t-il une formule qui dépend de n et qui donne le nombre de rectangles qu'il contient ? Même question si l'on cherche à compter les carrés à la place des rectangles.

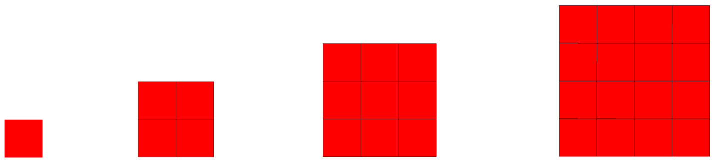

Figure 1 – Des rectangles

Regardons maintenant la figure 2 qui contient 4 dessins (en forme de triangle) de tailles 1, 2, 3 et 4. Combien y-a-t-il de triangles, toutes tailles et toutes orientations confondues, dans le premier dessin ? Même question pour les autres dessin. Si on note par n la taille du dessin, existe-t-il une formule qui donne le nombre de triangles qu'il contient ?

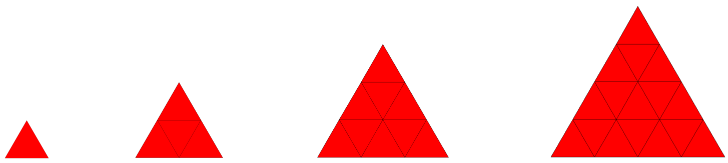

Figure 2 – Des triangles

Nous allons maintenant nous intéresser au pavage du plan à l'aide de triangles isocèles de tailles identiques. C'est à dire, que l'on recouvre le plan à l'aide de triangles collés les uns aux autres, sans recouvrement, et de façon à ce que le plan soit complètement recouvert.

Par exemple, la figure 3 montre une partie de ce pavage.

Nous allons maintenant colorier un nombre fini de tuiles. On appellera ce coloriage une mosaïque.

Par exemple, la figure 4 montre un exemple de mosaïque.

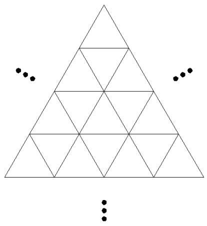

FIGURE 3 – Pavage du plan par des triangles équilatéraux

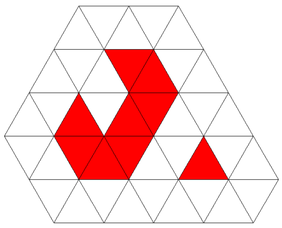

FIGURE 4 – Un exemple de mosaïque

On se donne maintenant une mosaïque que l'on va noter m.

Existe-il une formule ou une procédure qui petmet de déterminer le nombre de triangles contenus dans n'importe quelle mosaïque m ?

On considère maintenant une succession de mosaïques, numérotées de 1 à n, obtenues de la façon suivante : la mosaïque numéro i est la mosaïque obtenue en agrandissant la mosaïque m d'un facteur i. C'est à dire que l'on applique à la mosaïque m une homothétie de rapport i.

Par exemple, la figure 5 contient une séquence de mosaïques qui correspond à la mosaïque de la figure 4 qui a été agrandie respectivement 1, 2 et 3 fois.

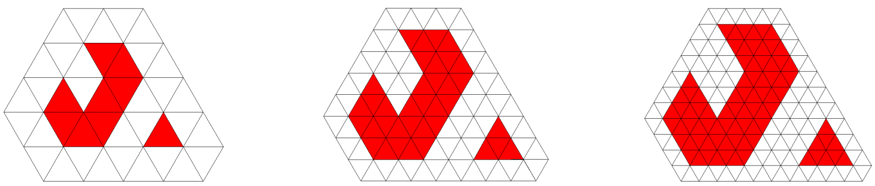

FIGURE 5 – Une séquence de mosaïques

Pour une mosaïque donnée, on souhaite maintenant compter le nombre de triangles, toutes tailles et orientations confondues, qui se trouvent dans la zone coloriée.

Par exemple, dans la figure 5, la première mosaïque contient 9 triangles. La deuxième mosaïque contient 51 triangles et la dernière mosaïque en contient 149.

1. Pour une mosaïque m donnée, existe-t-il une formule qui dépend de n et qui compte le nombre de triangles contenus dans l'agrandissement par un facteur n de la mosaïque m ?
2. Plus généralement, existe-t-il une formule qui, pour toute mosaïque m et pour tout entier n, donne le nombre de triangles contenus par la mosaïque m agrandie n fois.

3. Proposez des variantes à ce problème et essayez de les résoudre. Par exemple, on peut aussi essayer de compter le nombre de losanges dans les mosaïques.

On décide maintenant de paver l'interieur du vaisseau Rama d'Arthur Charles Clark, la surface du donuts de Homer et la planète du petit prince. Quelle réponse peut-on donner à toutes ces questions ?