

Un jeu nous a été proposé par François Sauvageot. On considère un jeu à deux joueurs qui se joue avec  $n$  jetons identiques ( $n \geq 2$ ).

- Une configuration est la répartition de ces  $n$  jetons en un certains nombres de piles.
  - Par exemple pour  $n = 4$ , les configurations possible sont les suivantes :  $[4]$ ,  $[3;1]$ ,  $[2;2]$ ,  $[2;1;1]$  et  $[1;1;1;1]$

En partant d'une configuration de départ, les joueurs jouent à tour de rôle et peuvent :

- soit diviser une pile en  $m$  piles de même taille ( $m \geq 2$ )
- soit fusionner deux piles de tailles différentes

Le joueur n'ayant plus de coup possible a perdu.

- La longueur  $L(C)$  d'une configuration  $C$  est le nombre minimum de coups (en comptant les coups des deux joueurs) qu'il faut à un des deux joueurs pour gagner (c'est à dire que son adversaire peut l'empêcher de gagner en moins de  $L(C)$  coups). Si le jeu se termine, on dit que  $L(C)$  est finie, sinon dit que  $L(C) = \text{infini}$ .
  - La longueur  $L(n)$  du jeu est la plus grande longueur parmi les configurations de longueur finie.
1. Si on imagine que les joueurs ne cherchent pas nécessairement à gagner, existe-t-il des valeurs de  $n$  ( $n \geq 2$ ) pour lesquelles des parties qui durent indéfiniment ?
  2. Peut-on trouver toutes les configurations de longueur 1 ?
  3. Peut-on caractériser les valeurs de  $n$  ( $n \geq 2$ ) pour lesquelles le jeu est de longueur supérieure ou égale à 2 ? à 4 ?
  4. Peut-on toujours trouver, pour  $n \geq 2$ , la longueur du jeu à  $n$  jetons ?
  5. Peut-on caractériser les valeurs de  $n$  ( $n \geq 2$ ) pour lesquelles toutes les configurations sont de longueur finie ?
  6. Peut-on faire évoluer ce jeu vers un jeu à plus de 2 joueurs ?

Bien sûr, nous chercherons toutes les réponses à ces questions en partant du principe que les deux joueurs ne font jamais de "faute". Mais nous réfléchirons aussi à des stratégies qui pousseraient un joueur à en faire.