

Le problème du cavalier

Contexte / mise en bouche

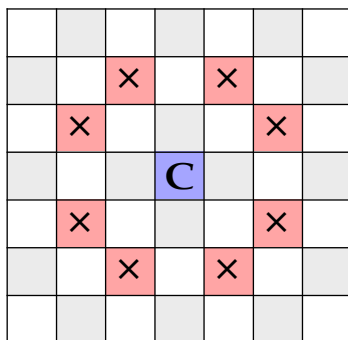
Aux échecs, le cavalier ne se déplace pas comme les autres pièces : il avance en formant un **L**. Plus précisément, il se déplace de deux cases dans une direction, puis d'une case dans la direction perpendiculaire. Depuis une case donnée, il n'a donc accès qu'à certaines cases de l'échiquier.

Mais alors, que peut-on faire si on le laisse se déplacer longtemps ?

Énoncé

On place un cavalier sur une case d'un échiquier. On rappelle qu'un déplacement de cavalier se fait :

- soit de 2 cases horizontalement puis de 1 case verticalement ;
- soit de 2 cases verticalement puis de 1 case horizontalement.



En bleu : la position du cavalier. En rouge : les cases qu'il peut atteindre en un coup.

On cherche maintenant à comprendre s'il est possible de parcourir l'échiquier en utilisant unique-ment ces déplacements.

Commencez par de petits échiquiers :

3×3 ,

4×4 ,

5×5 ,

6×6 .

Jusqu'à combien de cases pouvez-vous faire passer le cavalier ?

1. Sur un échiquier 8×8 , peut-on trouver un chemin qui permet au cavalier de passer par **toutes les cases** ?
2. Peut-on passer par toutes les cases **sans jamais passer deux fois par la même case** ?
3. Peut-on en plus revenir à la case de départ une fois toutes les cases visitées ?
4. Le résultat dépend-il de la case sur laquelle le cavalier commence son parcours ?
5. Que se passe-t-il si l'on change la taille de l'échiquier ? Pour quelles tailles semble-t-il possible de visiter toutes les cases ?
6. Que se passe-t-il si l'on enlève une case de l'échiquier ? Et si l'on en enlève deux ?
7. Que se passe-t-il sur un échiquier rectangulaire de taille $m \times n$?

Question principale : Peut-on parcourir tout un échiquier avec un cavalier en passant une seule fois par chaque case ?