

## Shifumi

Vous connaissez sans doute le jeu du Shifumi – Pierre, feuille, ciseaux. Il oppose deux joueurs, disons A(nton) et B(eyoncé). A chaque session, A et B montrent simultanément, par un signe des mains, un des trois choix possibles : pierre, feuille ou ciseaux. Or, ciseaux l'emporte sur feuille (elle la coupe), feuille sur pierre (elle l'enveloppe), et pierre sur ciseaux (les ciseaux s'émousent sur la pierre). Chaque joueur, en proposant son choix, a donc une chance sur trois de faire match nul (si l'autre fait le même choix que lui), Une chance sur trois de perdre, et une chance sur trois de gagner. C'est donc équilibré.

Il y a une version connue où on ajoute un puits. Il gagne contre Pierre et ciseaux, mais perd contre feuille. Il a donc un avantage sur les autres éléments : il gagne contre deux d'entre eux, et perd contre un seul. C'est *déséquilibré*.

La question est de savoir s'il existe un jeu de shifumi **équilibré** plus grand, avec  $n$  objets différents, avec les deux principes suivants !

- Quelle que soit la paire  $(x,y)$  d'objets différents, choisie parmi les  $n$  objets, on a toujours soit  $x > y$  ( $x$  l'emporte sur  $y$ ), ou  $x < y$  ( $y$  l'emporte sur  $x$ ) ;
- Quel que soit  $x$ , il y a autant de  $y$  vérifiant  $y > x$  que de  $y$  vérifiant  $y < x$ .

La version à quatre objets, avec le puits, n'est donc pas équilibré.

**Question 1 :** Existe-t 'il un shifumi équilibré avec 4 objets ?

**Question 2 :** Existe-t 'il un shifumi équilibré avec 5 objets ?

**Première question Principale :** Quels sont les entiers  $n$  pour lesquels il existe un shifumi équilibré de taille  $n$  ?

**Question 4 :** combien y a-t-il de shifumis équilibrés avec 5 objets ? Avec 7 objets ? (Nota Bene : le nom des objets n'a aucune importance, on dit que deux shifumis sont les mêmes si on obtient l'un à partir de l'autre simplement en changeant (ou permutant) les noms des objets. Par exemple, Pierre-Feuille-Ciseau est le même que Ciseau-Pierre-Feuille, ou que Pierre-Paul-Jacques).

**Question Avancée :** Un super-shifumi est un shifumi équilibré tel que pour tout objet  $x$ , les objets dominés par  $x$  forment un super-shifumi. *Quels sont les entiers  $n$  pour lesquels il existe un shifumi équilibré de taille  $n$  ?*

**Question Badass :** Existe-t 'il un  $n$  pour lequel il y a plusieurs super-shifumis de taille  $n$  différents ?