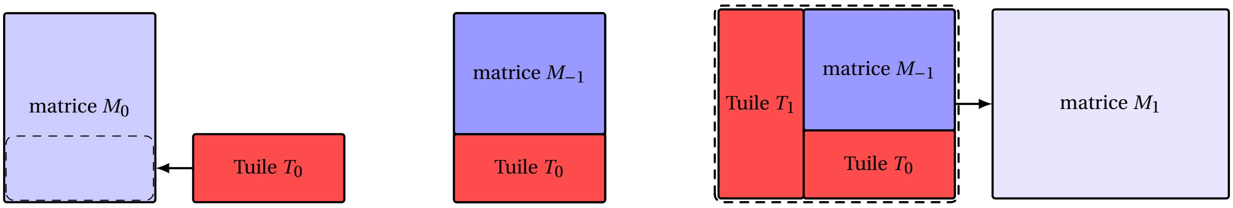
PROBLÈME 1 (PAVAGES RECTANGULAIRES)

Un pavage du plan est obtenu en recouvrant par des « tuiles », choisies dans un ensemble fini, toutes les régions du plan sans laisser de trou et sans que deux tuiles se recouvrent. Certains pavages sont célèbres, tels ceux créés par *Maurits Cornelis Escher* ou *Roger Penrose*. On peut envisager des pavages utilisant un nombre infini de tuiles différentes mais en se donnant néanmoins des contraintes. Nous nous intéresserons à des pavages infinis du plan par des tuiles rectangulaires selon le principe décrit ci-après.

On considère deux familles de rectangles possédant les mêmes formes, que nous qualifierons respectivement de « tuiles » et de « matrices ». Chaque tuile doit s'insérer dans une matrice en y laissant un espace rectangulaire de même forme que la matrice.

Exemple : Considérons la matrice M_0 définie par les dimensions 8 cm et 10 cm. La tuile T_0 de dimensions 3,6 cm et 8 cm s'y insère en y laissant un espace M_{-1} de dimensions 6,4 cm et 8 cm et on constate bien que M_{-1} est une réduction de M_0 . Inversement, on peut compléter cette matrice M_0 par la tuile T_1 de dimensions 4,5 cm et 10 cm pour créer la matrice M_1 de dimensions 10 cm et 12,5 cm ; M_1 et T_1 sont alors bien des agrandissements de M_0 et T_0.



On pourra se poser les questions suivantes :

1. Le procédé peut-il se poursuivre à l'infini dans toutes les directions et dans les deux sens en prenant des tuiles de plus en plus petites ou de plus en plus grandes ?
2. À chaque matrice correspond-t-il une tuile ? À chaque tuile une matrice ? Le cas échéant, y a-t-il unicité ?
3. Y a-t-il des cas particuliers intéressants ? Le procédé peut-il s'étendre à d'autres polygones que des rectangles ?
4. Peut-on imaginer un procédé analogue pour paver l'espace à partir d'une matrice qui serait alors un pavé droit de dimensions quelconques ?