Sujets Maths en Jeans 2024–2025

Collège Max Rouquette, Saint-André de Sangonis (34)
Collège Lo Trentanel, Gignac (34)

Organisateurs des ateliers : Dorothée Dhondt, Dorothee.Dhondt@ac-montpellier.fr
Maxime Lannoy, Maxime.Lannoy@ac-montpellier.fr
Laurent Marty, Laurent.Marty4@ac-montpellier.fr

Chercheur associé : Sylvain Brochard, sylvain.brochard@umontpellier.fr

1 Nombres de sable

Pour mesurer le temps qui passe, on dispose d'une infinité de sabliers à deux vitesses : un mécanisme au centre de chaque sablier permet d'élargir le trou et le sable s'écoule alors deux fois plus vite. Chaque sablier dure une heure en première vitesse, ou une demi-heure en seconde vitesse.

Au départ, tous les sabliers ont le sable en bas. On a le droit de retourner autant de sabliers que l'on veut au temps 0. On peut ensuite retourner autant de sabliers que l'on veut, ou changer leur vitesse, à chaque fois qu'un sablier a fini de s'écouler.

Questions : peut-on mesurer ainsi 2h (facile) ? 3/4-d'heure (oui mais moins facile) ? 1/4-d'heure (non mais pourquoi) ? Quelles sont les nombres d'heures que l'on peut mesurer (on les appelle les nombres de sable) ? Et ceux que l'on ne peut pas ? Quel est le plus petit nombre de sable après 3/4 ? Et après 1 ? Et après 2 ?

2 Le loup et l'agneau

Un agneau se trouve sur un échiquier infini et tente d'échapper à un loup. L'agneau peut se déplacer sur l'une des huit cases entourant la case où il se trouve. Cependant, après chaque déplacement, le loup bloque une des cases de l'échiquier de telle sorte que l'agneau ne puisse plus jamais y aller. Si l'agneau se retrouve encerclé par des cases bloquées, il sera capturé (puis mangé !) par le loup.

- Le loup peut-il capturer l'agneau ? Si oui, avec quelle stratégie ?
- L'agneau peut-il s'échapper indéfiniment ? Si oui, comment ?
- Que se passe-t-il si le loup peut bloquer 2 cases à chaque mouvement de l'agneau ? Et si l'agneau peut se déplacer de 3 cases ? De 4 cases ?
- Et si le loup ne peut pas bloquer des cases n'importe où, mais seulement des cases qui ne sont pas trop éloignées de la dernière case bloquée (par exemple, au maximum 4 cases plus loin) ?
- Et si le problème concernait un moustique et une chauve-souris sur une grille en trois dimensions ?

3 Produits des chiffres

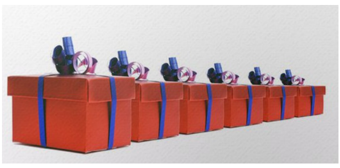
Prenons un nombre entre 10 et 99, par exemple 77, et multiplions les deux chiffres qui le composent : $7 \times 7 = 49$. Si nous avons encore un nombre entre 10 et 100, nous recommençons jusqu'à n'obtenir qu'un seul chiffre :

$$77 \to 49 \to 36 \to 18 \to 8.$$

Dans notre exemple, le nombre 77 mène à 8, on dira alors que 77 est un antécédent de 8 et que 8 est la finalité de 77 (ici, 8 est également la finalité de 49, 36 et 18). Enfin, on parlera de chaîne pour parler de la suite de nombres obtenue (comme dans l'exemple). Est-on sûr que que chaque nombre possède une finalité ? Ou est-ce qu'une chaîne peut avoir des nombres qui sont toujours plus grands ? Ou alors, un nombre qui va créer un cycle (c'est-à-dire qu'à un moment, on retombe sur un nombre déjà présent dans la chaîne) ? Est-ce que tous les chiffres de 0 à 9 possèdent un antécédent ? Est-ce qu'il y a des chiffres qui reviennent plus souvent que d'autres comme finalité ? Peut-on avoir une idée de la finalité d'un nombre au premier coup d'oeil ? Par exemple, les nombres pairs (ou alors impairs) sont-ils les antécédents des mêmes chiffres ? Quelles sont les conditions pour obtenir 5 comme finalité ? Et peut-on généraliser les conclusions précédentes aux nombres plus grands que 100 ?

4 Le lutin facétieux

C'est la panique dans l'atelier du Père Noël : un lutin facétieux s'est caché dans un cadeau. Les cadeaux sont disposés en dix rangées infinies.



Heureusement, le Père Noël sait que le lutin est caché dans l'un des cent premiers cadeaux de l'une des dix rangées – du moins au départ. Il commence à chercher le lutin en ouvrant les cadeaux les uns après les autres. Hélas, il sait aussi que le lutin, qui est un peu magicien, peut passer à travers les parois des cadeaux. Pendant que le Père Noël referme un cadeau qu'il vient d'ouvrir (c'est un homme méticuleux, qui ne supporte pas le désordre dans son atelier !), le lutin change de cadeau pour passer soit dans le suivant, soit dans le précédent. Il ne change jamais de rangée.

Le Père Noël pourra-t-il retrouver le lutin ? Si oui, combien de cadeaux devra-t-il ouvrir ? Et si le Père Noël peut ouvrir deux cadeaux à la fois ? Que se passe-t-il si le lutin ne peut pas passer dans le cadeau d'à côté, mais doit choisir entre sauter de deux cadeaux vers l'avant ou de trois cadeaux vers l'arrière ?

5 Le charlatan magicien

Vous êtes un charlatan qui veut participer à un concours de potions magiques où vous avez à votre disposition un sac contenant deux types d'ingrédients : des ingrédients explosifs et des ingrédients bonus avec chacun un pouvoir magique compris entre 1 et 3. Le but est de créer une potion la plus puissante possible (c'est-à-dire avec la plus grande somme des ingrédients magiques) en choisissant judicieusement les ingrédients. Mais vous n'avez pas le droit de regarder dans le sac quel ingrédient vous prenez et, comme vous êtes un charlatan, vous ne savez pas faire la différence entre les ingrédients explosifs et les ingrédients bonus. Vous allez donc devoir les choisir au hasard. Vous savez tout de même que, dans votre sac, il y a 10 ingrédients répartis de la manière suivante.

Type	Explosifs							Bonus		
Puissance	1	1	1	1	2	2	3	1	2	3

Il y a trois règles à retenir :

1. Vous tirez les ingrédients les uns après les autres. Après chaque tirage, vous avez le droit de vous arrêter.
2. Dès que vous sortez un ingrédient du sac, vous devez le mettre dans votre marmite (pas le droit de le remettre discrètement dans le sac et d'en tirer un autre).
3. Si la somme des puissances des ingrédients explosifs dépasse strictement 7, votre marmite explose et vous avez perdu.

La question qu'on se pose est de savoir comment maximiser les chances d'avoir une potion la plus puissante possible. Par exemple, on peut choisir de s'arrêter s'il reste dans le sac au moins un jeton qui peut faire exploser la marmite (au risque d'être trop frileux). On peut aussi décider de s'arrêter lorsque le risque de faire exploser la marmite dépasse 1 chance sur 2, ou lorsque nous avons tiré tous les jetons bonus.

Pour commencer, nous pouvons regarder quelles configurations font exploser la marmite, ou celles qui donnent la plus grande puissance magique. Nous pouvons aussi prendre une stratégie et regarder la probabilité d'atteindre la puissance magique maximale, ou une puissance au moins supérieure à 10 par exemple. Comme il y a beaucoup de stratégies possibles et que faire tous les calculs peut être complexe, nous pouvons aussi utiliser un ordinateur : programmer quelques stratégies et les faire s'affronter un grand nombre de fois pour voir celle(s) qui gagne(nt) le plus souvent.

6 Il n'en restera qu'un

On considère un échiquier de taille illimitée sur lequel on dispose n^2 jetons. Au début, ces jetons sont mis dans un tableau $n \times n$. On met un jeton par case. À chaque étape, on choisit un pion et on le fait sauter horizontalement ou verticalement au-dessus d'une case adjacente occupée par un jeton vers une case vide située immédiatement derrière. On enlève alors la pièce sautée. Peut-on espérer terminer le jeu avec un seul jeton sur l'échiquier ? Si c'est possible, peut-on préciser où ce dernier jeton va se trouver ? Et si au départ, les jetons sont disposés en un rectangle de taille $n \times m$? Pour un nombre p fixé, est-il toujours possible de poser p pions sur l'échiquier de telle sorte qu'il existe une stratégie permettant de finir avec un seul pion ? Si oui, comment peut-on les poser ?