

Historie d'abeilles ★ ★ ★ ★ ☆

Chacun sait que les alvéoles des ruches d'abeilles ont une ouverture de forme hexagonale. Une alvéole pourrait être un prisme, c'est-à-dire que le fond de l'alvéole pourrait être également un hexagone régulier, mais il n'en est rien. Les abeilles remplissent le fond de leurs alvéoles à l'aide de trois losanges identiques, chaque losange constituant un tiers du fond d'une alvéole voisine. De plus les alvéoles sont d'une précision remarquable, en effet les côtés de l'alvéole sont tous égaux et le grand angle des losanges utilisés pour le fond est exactement de $109^{\circ}28'$.

1. À votre avis, pourquoi les alvéoles ont-elles cette forme aussi régulière et particulière ?

On cherche à présent à paver le plan avec une même figure que l'on va pouvoir répéter, dans un soucis de simplicité et de symétrie on s'oriente naturellement vers les polygones réguliers.

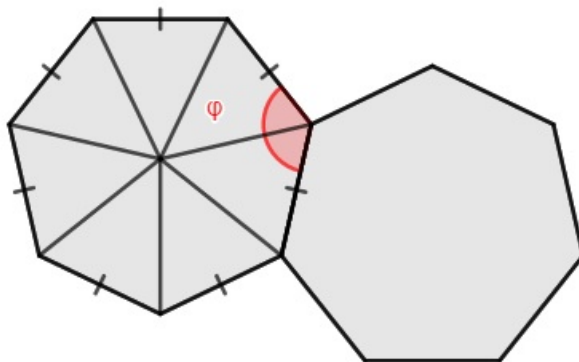


FIGURE 1 – Exemple de polygone régulier

2. Pour un polygone régulier à n côtés ($n \geq 3$), quelle est en fonction de n la mesure de l'angle φ entre deux côtés consécutifs ?
3. Trouvez une relation entre k et n pour pouvoir accoler par un même sommet k polygones réguliers à n côtés.
4. En déduire les polygones possibles pour paver le plan.

Parmi les polygones retenus, encore faut-il déterminer celui qui a le périmètre le plus petit par rapport à son aire.

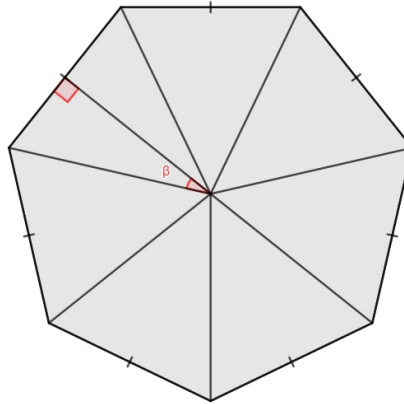


FIGURE 2 – Lien entre périmètre et aire dans un polygone régulier

5. En supposant constante l'aire des polygones précédents (disons 1m^2 pour fixer les idées), exprimez le périmètre de chacune de ces figures.
6. En déduire quel polygone est le plus adapté au pavage du plan, et donc pour les abeilles.



FIGURE 3 – Coupe d'une structure d'alvéole

Le fond formé de trois losanges permet un adossement simple des alvéoles. Chaque fond d'alvéole d'une feuille de cire vient s'imbriquer parfaitement entre les fonds de trois alvéoles de l'autre feuille. Le fait que les fonds se chevauchent parfaitement dans l'espace permet d'une part d'optimiser la place car il n'y a absolument aucune perte. D'autre part, cela permet de rendre la structure totale beaucoup plus solide que si les fonds étaient plats.

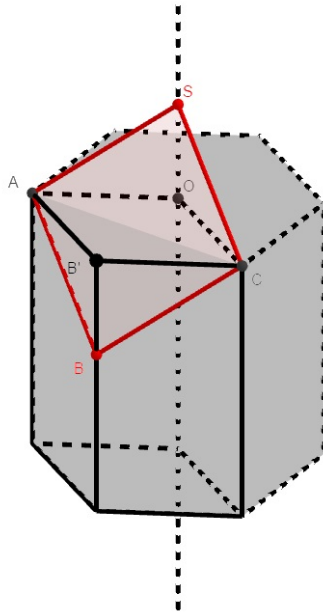


FIGURE 4 – Figure de l'alvéole

7. Montrez qu'en remplaçant le losange $AB'CO$ par le losange $ABCS$ on ne modifie pas le volume de l'alvéole.

Ainsi pour optimiser encore la quantité de cire à utiliser, il suffit de trouver l'inclinaison des losanges pour que l'aire de ces losanges soit la plus petite possible.

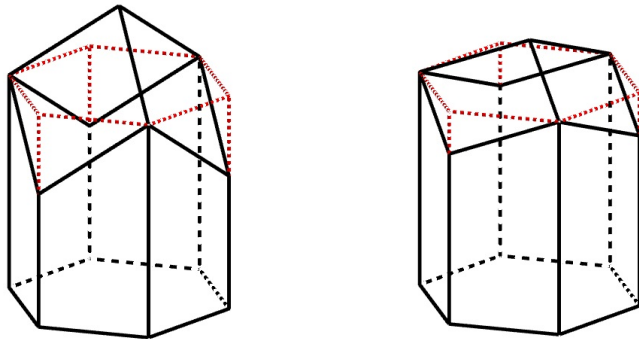


FIGURE 5 – Différentes configuration des losanges

8. Trouvez la valeur de l'angle \widehat{ASC} dans la configuration optimale.