

# Problème de premier passage pour une marche aléatoire sur une grille

## Contexte

Considérons une grille rectangulaire de dimensions  $m \times n$ . Un chemin aléatoire est initié à partir d'un nœud spécifiquement situé en  $(i, j)$  dans la grille.

## Description de la marche

À chaque étape du chemin, un déplacement est effectué vers l'un des quatre nœuds directement adjacents (en haut, en bas, à gauche, ou à droite) selon les connexions standards d'une grille. Chaque direction possible de déplacement est choisie avec une probabilité uniforme de  $1/4$ . Le chemin continue ses déplacements aléatoires jusqu'à ce qu'il atteigne pour la première fois un bord de la grille.

## Question principale : Détermination d'un jeu de probabilités

Quelle est la probabilité qu'un chemin, démarrant au nœud  $(i, j)$ , atteigne pour la première fois un bord de la grille au nœud  $(k, l)$ , où  $(k, l)$  est situé sur un des bords de la grille ?

## Instructions pour l'analyse

1. **Définir les paramètres initiaux :** Établissez clairement les dimensions de la grille et le point de départ du chemin.
2. **Développer la méthode de calcul :** Proposez une méthode pour déterminer la probabilité que le chemin atteigne pour la première fois un bord spécifique. Considérez des approches analytiques basées sur la théorie des probabilités et des marches aléatoires, ainsi que des simulations numériques si nécessaire.
3. **Présenter les résultats :** Offrez une solution détaillée avec des justifications mathématiques, accompagnée, si possible, de visualisations graphiques ou de résultats de simulations pour illustrer le processus et les résultats.

## Question secondaire : Détermination de la longueur moyenne des chemins

En complément à l'analyse principale de la probabilité d'atteindre un bord spécifique de la grille pour la première fois, une investigation pertinente serait de pouvoir évaluer la longueur moyenne des chemins démarrant au nœud  $(i, j)$  et qui parviennent exactement au nœud  $(k, l)$ , qui est situé sur un bord de la grille.

## Exemple d'une grille et d'un premier chemin aléatoire

