

Sujet 1 : Diviser ou multiplier, pour régner

MATH.en.JEANS 2025-2025

Je vous propose un jeu à deux ou plusieurs joueuses. On commence par décider d'un nombre entier n (par exemple $n=100$) et on considère la liste des nombres entiers de 1 à n (inclus). La première joueuse dit un nombre dans cette liste. La joueuse suivante doit dire un nombre qui est soit un diviseur soit un multiple du précédent, et qui n'a pas encore été joué. La manche s'arrête quand la joueuse courante n'a plus de possibilité : cette dernière a perdu. La vainqueur de la partie est celle qui a perdu le moins de manches.

La question posée est simplement de trouver une stratégie pour gagner.

Vous pourrez commencer par analyser une version à une joueuse qui est la suivante : pour n donné, quel nombre choisir entre 1 et n pour que la suite des diviseurs et multiples possibles soit la plus courte ? La plus longue ? Quelle est la taille de ces suites ?

Par exemple, si on prend $n=20$. Une partie possible est $12 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 15 \rightarrow 5 \rightarrow 20 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 1 \rightarrow 7 \rightarrow 14$, soit une suite à 13 nombres qui s'arrête car il n'y a aucun multiple de 14 inférieur à 20 et les diviseurs 1, 2 et 7 ont déjà été joués.

| | | | | |
|---------------|---------------|----|---------------|---------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |

Dans la version à 2 joueuses, quelle stratégie conseilleriez-vous pour gagner ?

Pour compliquer les choses, je rajoute une nouvelle règle dans le cas 2 joueuses : le nombre de départ doit être pair. Quelle est alors la meilleure stratégie ?

Et que se passe-t-il avec plus de 2 joueuses ?