

Un modèle de dépôt avec effondrement

On étudie un modèle de dépôt de matière (constituée de particules) avec effondrement, en dimensions 1 (sur un segment) et 2 (sur un carré).

En dimension 1, on fixe un nombre N de cases alignées, et chaque case contient un nombre entier de particules. Si chaque case contient 0 ou 1 particule, il ne se passe rien, mais dès qu'une case contient au moins 2 particules, il y a *effondrement* : la case s'effondre sur ses cases voisines, en leur donnant 1 particule chacune.



Si la case est sur un bord du segment, la particule qui devait aller dans la case voisine inexistante va simplement disparaître.

Attention, il peut y avoir une cascade d'effondrements : toutes les cases devant s'effondrer le font jusqu'à revenir à 0 ou 1 particule.

En dimension 2, le modèle est quasiment le même, sauf qu'on se place sur un carré de côté N , formé donc de $N \times N$ cases, et les cases s'effondrent lorsqu'elles contiennent 4 particules ou plus, en en distribuant 1 à chacune de leurs 4 cases voisines (adjacentes).

Pour chacun de ces deux modèles, vous pourrez :

- étudier quelques exemples de configurations, d'effondrements et de cascades d'effondrements;
- montrer que lorsque plusieurs cases s'effondrent, l'ordre dans lequel on effectue les effondrements ne change pas la configuration obtenue (on dit que les effondrements sont commutatifs);
- décrire le plus précisément possible l'ensemble des configurations atteignables, c'est-à-dire les configurations qu'on peut obtenir à partir de n'importe quelle configuration en ajoutant des particules;
- vérifier que les points précédents permettent de définir une addition sur l'ensemble des configurations atteignables : on ajoute les particules des deux configurations sur chaque site et on fait tous les effondrements nécessaires;
- écrire la table d'addition pour cette nouvelle addition pour des (toutes) petites valeurs de N .
- trouver un élément neutre pour cette addition : une configuration atteignable dont l'addition à n'importe quelle configuration atteignable redonne la même configuration.

L'utilisation de l'ordinateur pour faire des simulations est possible, voire recommandée (en particulier quand N est un peu grand...).