

PROBLÈME DE DAMIER

On se fixe un damier avec N colonnes et N lignes (le nombre N est égal à 2 dans la figure). On cherche à mettre dans chaque case une valeur 0, 1 ou -1 telle que la somme sur *chaque* ligne et *chaque* colonne soit différente. Est-ce toujours possible ?

La figure donne une solution pour $N = 2$. Les sommes pour les lignes sont 0 et 1 et pour les colonnes 2 et -1 .

| | |
|---|----|
| 1 | -1 |
| 1 | 0 |

Ce problème est un des derniers auquel a réfléchi le très grand mathématicien français Jean-Christophe Yoccoz (1957-2016) pour s'amuser pendant les vacances de Noël 2015. Yoccoz a apporté une solution partielle au problème. Le problème vient d'être résolu en suivant des idées très proches de celles de Yoccoz.

Pour N pair le problème a toujours une solution et n'en a jamais pour N impair.

Yoccoz écrit "*The problem has an easy (positive) solution when N is even.*" On se concentrera modestement sur cette question et éventuellement sur les petites valeurs impaires de N . On pourra commencer par $N = 4$ et $N = 6$. Le cas $N = 3$ est aussi fort intéressant.