

Sujet 2 : Croissance d'une population de lapins

En 1202, L. Fibonacci propose d'étudier l'évolution du nombre de couples de lapins dans un élevage. Pour cela, il fait les hypothèses suivantes : tout couple de lapins « enfants » au mois n devient un couple de lapins « adolescents » au mois $n + 1$; tout couple de lapins « adolescents » au mois n devient un couple de lapins « adultes » au mois $n + 1$; les couples de lapins « adultes » ne meurent jamais ; et tout couple de lapins « adultes » au mois $n + 1$ donne naissance au mois $n + 1$ à un couple de lapins « enfants ». Au départ (au mois 0) l'élevage ne contient qu'un couple de lapins « enfants ».

La première partie du sujet consiste à établir que si on note F_n le nombre de couples de lapins au mois n on a les trois relations $F_0 = 1, F_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Puis prouver que cela implique que le nombre de couples de lapins devient arbitrairement grand au cours du temps.

La deuxième partie consiste à modifier la modélisation de Fibonacci pour empêcher cette explosion incontrôlée du nombre de couples de lapins. Que se passe-t-il si on suppose que les couples de lapins « adultes » meurent au bout d'un certain nombre de mois ? Si des maladies tuent chaque mois un certain pourcentage de couples de lapins « enfants » et/ou « adolescents » ? Etc..