

Sujets Maths en Jeans 2023-2024

Alexandre Pasco¹

¹ Centrale Nantes, Nantes Université, Laboratoire de Mathématiques Jean Leray
`Alexandre.Pasco@ec-nantes.fr`

1 Kirigami

M. Tokugawa est un guerrier samouraï qui adore l'Origami. Récemment il a découvert une discipline parfaite pour lui : le Kirigami. Comme en Origami on peut plier le papier, mais en Kirigami on peut également le couper. M. Tokugawa utilisant son sabre, il ne peut faire que des coupes droites. De plus, il décide que chacune de ses oeuvres sera obtenue en une seule coupe.

- 1) M. Tokugawa peut-il découper n'importe quel triangle ?
- 2) Même question avec un quadrilatère.
- 3) Même question un polygone quelconque.



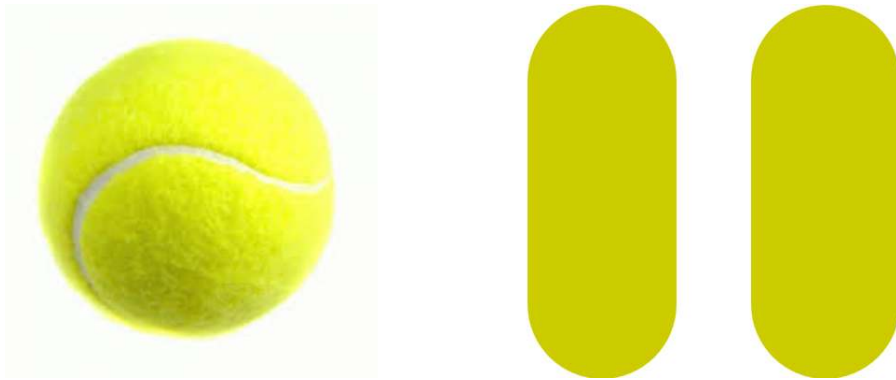
Triple rose trémière, symbole du clan Tokugawa qui gouvernait le Japon de 1603 à 1868.

2 Des ballons qui ne tournent pas rond

On veut créer des solides fermés à partir de feuilles de papier découpées en formes quelconques en collant leur bords. Le papier peut se déformer, mais il ne doit jamais se plier ni se déchirer.

1) Sur la première figure, on voit qu'en découpant deux languettes on peut obtenir une sorte de balle de tennis, qui est un solide fermé. Pour 2 bouts de papier, sous quelles conditions peut-on en coller les bords pour obtenir un solide fermé ?

2) De la même manière, sur la seconde figure, on voit qu'en découpant 6 pièces particulières, on peut obtenir le ballon de la coupe du monde de football 2014. Pour n bouts de papier, sous quelles conditions peut-on en coller les bords pour obtenir un solide fermé ?



A gauche, une balle de tennis. A droite, les deux languettes de feutre qui la recouvrent.



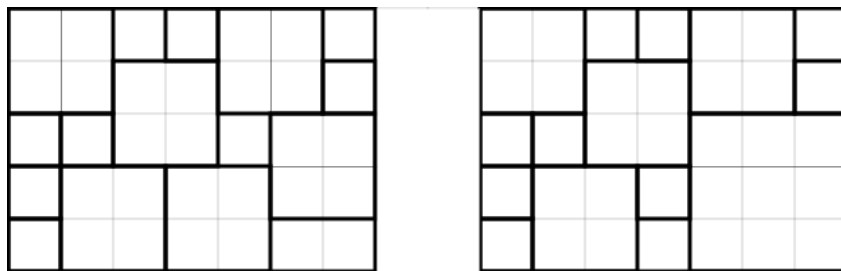
A gauche, le ballon de la coupe du monde de football 2014 au Brésil. A droite, les 6 pièces qui le recouvrent

3 Les tablettes de M. Prodnose

M. Prodnose aime le chocolat, mais il n'aime pas partager, donc il ne veut plus de tablettes de chocolat classiques. Il se lance alors dans la fabrication de ses propres tablettes de chocolat, et son but est de fabriquer des tablettes *bien faites* qui ne soient pas *partageables*.

- Une tablette est dite *bien faite* si c'est un carré de côté $n > 1$ contenant au moins 2 carreaux, et si tous ses carreaux sont des carrés de taille entière $(1, 2, \dots, n)$.
- Une tablette est dite *partageable* s'il est possible de la couper en deux avec un seul coup de couteau, sans passer à travers un carreau. Elle est dite *non-partageable* si elle n'est pas *partageable*.

- 1) Est-il possible de fabriquer des tablettes *bien faites* et *non-partageables* ? Si oui, de quelle(s) taille(s) peuvent-elles être ?
- 2) Au minimum, combien de carreaux doit posséder une tablette de taille n *bien faite* et *non-partageable* ?
- 3) Au maximum, combien de carreaux doit posséder une tablette de taille n *bien faite* et *non-partageable* ?



Deux tablettes rectangulaires de taille 5×7 . Ces tablettes ne sont pas *bien faites*. Celle de gauche est *non-partageable* mais celle de droite est *partageable*.

4 Attaque extraterrestre

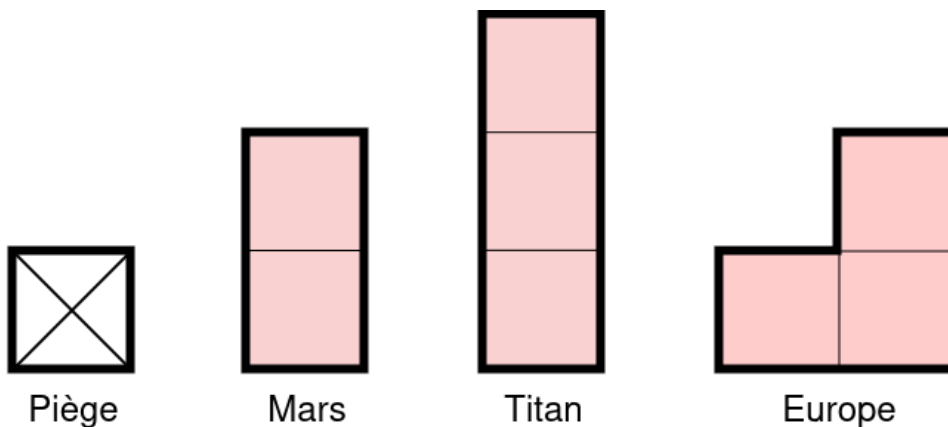
La terre est attaquée par des extraterrestres venus de différents astres du système solaire: Mars, Titan et Europe. La forme des vaisseaux extraterrestres dépend de là d'où ils viennent (voir figure). Tom possède un champ carré de taille 5×5 quadrillé en 25 emplacements de taille 1×1 . Tom veut protéger son champ en utilisant le moins de pièges possible.

1-a) Quel est le nombre minimum de pièges dont Tom aura besoin pour protéger son champ des extraterrestres venant de Mars ?

1-b) Quel est le nombre minimum de pièges dont Tom aura besoin pour protéger son champ des extraterrestres venant de Titan ?

1-c) Quel est le nombre minimum de pièges dont Tom aura besoin pour protéger son champ des extraterrestres venant d'Europe ?

2) Mêmes questions pour Emily qui possède un champ carré de taille 6×6 .

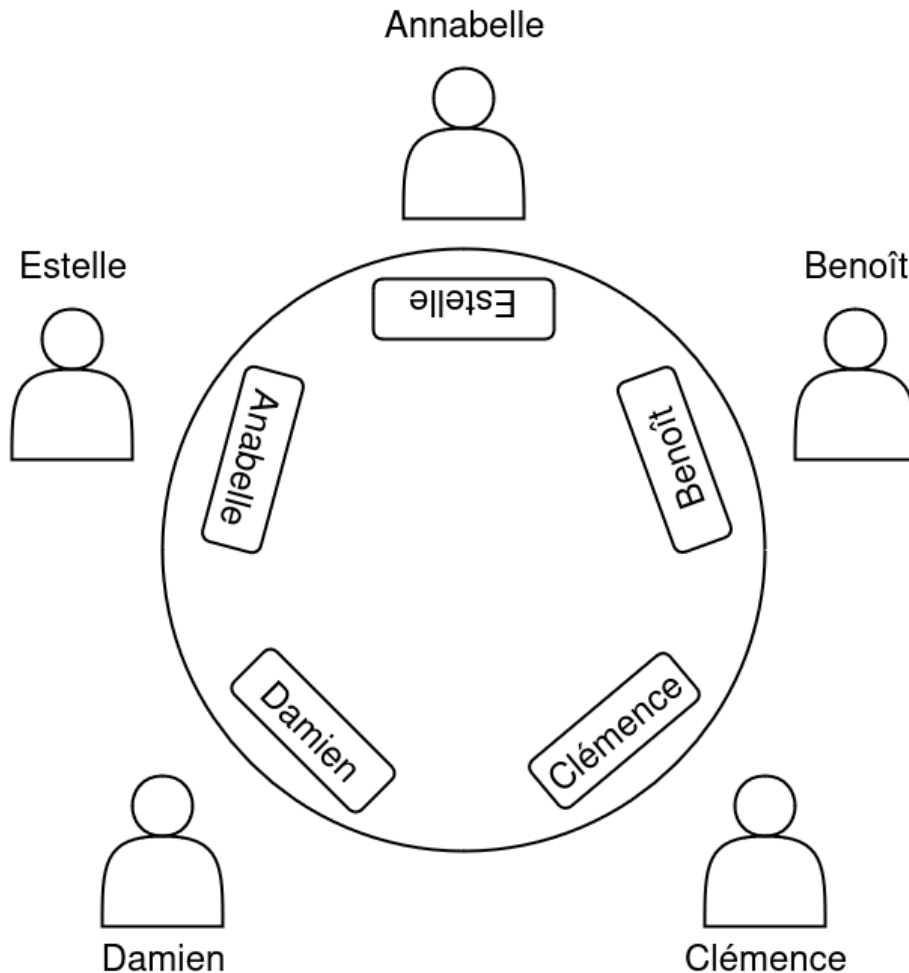


Piège et vaisseaux extraterrestres.

5 Réunion au sommet

Annabelle, Benoît, Clémence, Damien et Estelle sont les 5 membres du club de boxe anglaise de leur collège. Quand les membres se réunissent, ils s'assoient autour d'une table ronde tournante, sur laquelle sont disposées des pancartes avec leurs noms. La réunion se déroule en suivant une seule règle: si un membre a la pancarte avec son nom devant lui, il parle, puis fait tourner la table dans le sens horaire jusqu'à ce que la pancarte suivante arrive devant lui. La réunion s'arrête quand tout le monde a parlé.

- 1) Les membres peuvent-ils se placer de sorte que tout le monde parle sans que personne ne se coupe la parole ? Si oui, quelles sont les dispositions possibles ?
- 2) Même question pour un club comportant n membres.



Une réunion qui se déroule mal: Benoît, Clémence et Damien parlent en même temps.

6 Défilé de mode

Bientôt aura lieu le C-event, un défilé de mode annuel sur le thème de la casquette. L'agence M&L de mannequinat y envoie ses 100 mannequins pour remporter le premier prix. Cependant cette année, les règles du défilé sont particulières.

- Pour chaque agence, les mannequins sont placés en file indienne et regardent tous dans la même direction, de sorte que chacun peut voir ceux qui sont avant lui, mais pas ceux après.
 - Sur la tête de chaque mannequin, les organisateurs viennent placer au hasard une casquette rouge ou verte, en faisant en sorte que son porteur n'en voit pas la couleur.
 - A tour de rôle et en commençant par le dernier de la file (celui qui voit tous les autres), chaque mannequin annonce la couleur présumée de sa casquette. L'agence marquera autant de points que de bonne réponse.
- 1) Établir une stratégie pour que l'agence marque le plus de points possible.
 - 2) Même question avec 3 couleurs différentes de casquettes.



Solutions et bibliographie

Les problèmes sur le chocolat, les extraterrestres et la réunion sont des reformulations de ce qui est présenté dans [Grenier, 2018] qui résume brièvement [Grenier et al., 2017]. Ce dernier propose une analyse détaillée, aussi bien mathématique que didactique, de plusieurs problèmes de mathématiques accessibles dès le début du collèges et qui restent intéressants à tous niveaux.

Kirigami. Pour les triangles, on se rend compte que les cas équilatéral et isocèle sont relativement faciles grâce à leurs symétries. En revanche, le cas triangle quelconque est plus difficile. Si on a bien cerné ce dernier, on peut raisonnablement généraliser à tout polygone convexe. On peut également généraliser aux polygones non convexes, mais c'est un petit peu plus pénible. Une explication détaillée est disponible dans [Fiorelli Vilmart, 2010].

Des ballons qui ne tournent pas rond. Pour 2 bouts de papier, une condition nécessaire est l'égalité des périmètres. On pourra remarquer que la convexité est une condition suffisante, et qu'elle permet de coller 2 pièces dans n'importe quelle orientation. Pour des formes non-convexes, il faudra pouvoir coller des bosses assez "pointues" dans les creux. Pour plusieurs pièces, il faudra que ces dernières aient des angles. Plus de détails et d'explications sont disponibles dans le très bon billet de blog [Ghys, 2014].

Les tablettes de M. Prodnose Pour $n < 5$ on peut montrer qu'il n'existe pas de solution. Pour $n = 5$, on peut trouver une solution et montrer qu'elle est unique à rotation près. Pour $n > 5$ on peut construire une solution à partir du cas $n = 5$. Pour le minimum ou le maximum de carreaux, on pourra se contenter de bornes inférieures ou supérieures. Plus de détails et d'explications dans "le carré insécable" dans [Grenier et al., 2017]

Attaque extraterrestre. C'est un problème d'optimisation faisant intervenir des notions avancées telles que les minimums locaux ou la majoration-minoration d'un minimum. On major en proposant des solutions pour protéger le champs. On minor en plaçant le plus de vaisseaux sur le champs. Plus de détails et d'explications dans "la chasse à la bête" dans [Grenier et al., 2017].

Réunion au sommet. Pour $n = 5$ on peut exhiber 3 solutions, à permutation près des participants. Pour n membres, on commencera par remarquer qu'il n'existe pas de solution si n est pair. Pour n impair, on obtient les solutions en plaçant les participants dans l'ordre toutes les d pancartes, avec d tel que n, d ainsi que $n, d - 1$ sont premiers entre eux. Plus de détails et d'explications dans [Godot, 2005].

Défilé de mode. La stratégie optimale permet de marquer en moyenne 99.5 points. Pour cela, la couleur annoncée par la première personne sera donnée par la parité du nombre de casquettes vertes qu'elle verra. De là, la personne suivante connaît exactement sa couleur en observant la parité du nombre de casquettes vertes devant lui. De même pour les personnes suivantes.

References

- [Fiorelli Vilmart, 2010] Fiorelli Vilmart, S. (2010). En un coup de ciseaux 3. In *Semaine Des Maths 2010*, Genève. Université de Genève.
- [Ghys, 2014] Ghys, E. (2014). Le Brazuca, le ballon cubique de la Coupe du monde.
- [Godot, 2005] Godot, K. (2005). *Situations recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation. Exemple de la roue aux couleurs*. PhD thesis, Université Joseph-Fourier - Grenoble I.
- [Grenier, 2018] Grenier, D. (2018). Les mathématiques discrètes, une mine de situations de recherche pour le raisonnement et la preuve. In *Avec l'informatique, des maths plus discrètes ?*, Limoges. Institut Fourier Université Grenoble-Alpes.
- [Grenier et al., 2017] Grenier, D., Bacher, R., Barbe, H., Beffara, E., Bicaïs, Y., Charlot, G., Decauwert, M., Deraux, M., Gezer, T., Meilhan, J.-B., and Mouton, F. (2017). *Situations de recherche pour la classe: pour le collège et le lycée ... et au-delà*. IREM de Grenoble, Grenoble, edition revue et augmentée edition.