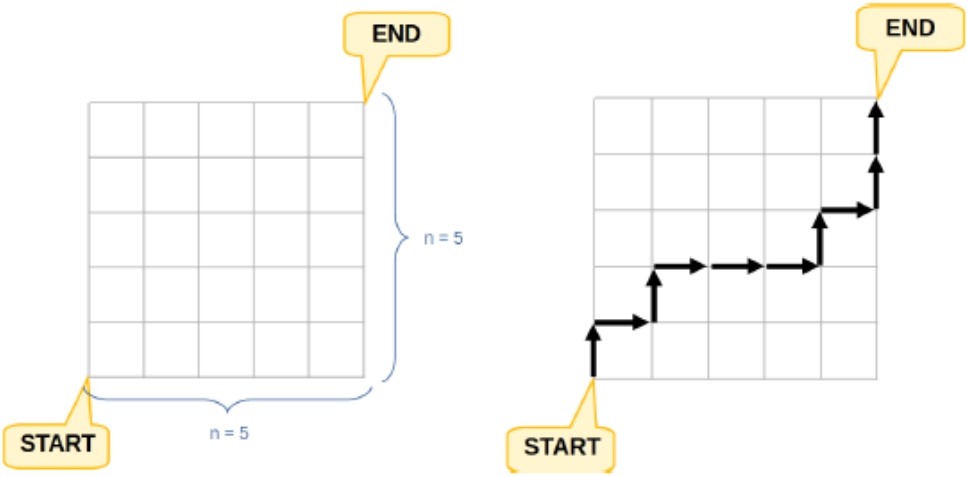
Chemins sur une grille.

Supposez que vous marchez sur une grille carrée $n \times n$ allant du START, situé au coin sud-ouest, à END, situé au coin nord-est. Supposons que vous ne puissiez faire que des pas vers le nord ($\uparrow$) ou l'est ($\longrightarrow$). Pour fixer les idées, sur le côté gauche du dessin ci-dessous se trouve une grille de 5×5 avec les points de START et END, et sur le côté droit un tel chemin.



Dans le cadre d'une première étude de ce modèle, vous répondez aux questions suivantes.

- Combien existe-t-il de chemins de ce type dans une grille $n \times n$ pour $n = 1, 2$? Vous les énumérerez à la main et dessinerez ces chemins.
- Combien existe-t-il de chemins de ce type dans une grille $n \times n$ pour n qualconque?
- Combien existe-t-il de chemins de ce type dans une grille $n \times k$ pour n et k qualconque?

Vous vous intéressez maintenant à un type particulier d'itinéraires START-END : ceux contenus dans la moitié nord-ouest de la grille, surlignée en rose dans le dessin ci-dessous. Vous pouvez également caractériser ces chemins comme étant ceux qui ne touchent jamais la première diagonale inférieure, dessinée en vert.

Votre question est simplement la suivante : combien y a-t-il de chemins de ce type ? Comme toujours, je recommande de calculer ce nombre à la main pour les petites valeurs de n.

Ensuite, vous pouvez essayer de trouver ce numéro de manière explicite. Si vous le faites et que vous voulez un indice : il peut être plus facile de compter le nombre de mauvais chemins et de considérer comme point d'intérêt la première fois qu'un mauvais chemin touche la première diagonale inférieure.

Il est également possible d'établir un lien entre ce nombre et le nombre de chemins de ce type dans des grilles plus petites. Si vous essayez de trouver cette relation, je vous conseille de classer les chemins en fonction de la dernière (ou de la première) fois qu'ils touchent la diagonale principale.