

Math en Jean: L'arbre magique.

Les questions données ne sont là que pour orienter la réflexion. Les élèves sont encouragés à suivre d'autres directions si certaines apparaissent lors de leurs recherches.

Un jardinier veut couper toute les branches d'un arbre selon une règle stricte mais l'arbre est magique et repousse de plus en plus. Peut-il parvenir à couper toute les branches ?

Pour établir précisément la question : l'arbre est constitué d'un tronc, de noeuds, de branches et de feuilles. A un noeud de l'arbre, plusieurs branches où feuilles peuvent partir. En haut du tronc, en bas d'une feuille et à chaque extrémité d'une branche se trouve un noeud (voir figure 1).

Chaque jour, le jardinier coupe une seule feuille. La première nuit, une autre feuille repousse, la seconde nuit deux feuilles repoussent, etc : la n -ième nuit, n feuilles repoussent. Elles repoussent toute sur le noeud en dessous de celui où la feuille coupée était. Si il n'y a pas de tel noeud, rien de repousse (voir figure 2).

1. Est-ce que le jardinier peut réussir à couper l'arbre jusqu'à ce qu'il ne reste que le tronc ?
2. Est-ce qu'il va y arriver quelque que soit la feuille qu'il choisisse de couper chaque jour et quelque que soit l'arbre de départ ?
3. Quelle est la meilleure stratégie pour couper l'arbre en le minimum de temps ?
4. Quelle est la taille (nombre de branche plus nombre de feuilles) maximale qu'un arbre peut atteindre si on part d'un arbre de taille N ? (Commencer par $N = 1, 2, 3, \dots$).

On peut chercher à modifier les règles de repousse pour voir si ça change les réponse et le type d'arbres que l'on obtient.