

PROBLÈME 4 : CONCERT ALÉATOIRE

Karlheinz Stockhausen est un compositeur allemand renommé. L'une de ses œuvres les plus célèbres est *Klavierstück XI* (<https://www.youtube.com/watch?v=NxLMtP8ejKA>).

Sa partition se compose d'une unique feuille de très grand format, sur laquelle sont disposées dix-neuf séquences musicales distinctes. Grâce à un dispositif aléatoire, tel qu'une roue de loterie, le pianiste sélectionne l'une de ces séquences au hasard et la joue, avant de choisir un second fragment de la même manière, et ainsi de suite.

Cette pièce peut être jouée de plusieurs manières différentes, et tous les sons peuvent être explorés. Toutefois, le pianiste doit respecter les règles suivantes :

- **Règle 1** : une séquence musicale ne peut pas être choisie deux fois de suite.
- **Règle 2** : Si le dispositif aléatoire sélectionne un fragment qui a déjà été joué deux fois, le concert s'arrête.

PARTIE 1. PREMIERS PAS

Sachant qu'un fragment dure 1 minute :

1. Quelle est la durée minimale du concert ?
2. Quelle est la durée maximale du concert ?
3. Combien de performances différentes sont possibles ?

PARTIE 2. GÉNÉRALISATION

On considère n , k et S trois entiers naturels non nuls. Dans cette partie, on suppose que la pièce comporte n fragments musicaux, chacun durant 1 minute, et que le concert dure k minutes.

1. On suppose que le dispositif aléatoire permet de tirer au sort le même fragment plusieurs fois de suite et sans limite.
 - (a) Quel est le nombre de concerts différents auxquels on peut assister ?
2. On suppose que le dispositif aléatoire permet de tirer au sort le même fragment plusieurs fois de suite et que la performance s'arrête dès qu'un fragment est joué deux fois de suite.
 - (a) Quel est le nombre de concerts différents auxquels on peut assister ?
 - (b) Quelle est la probabilité qu'un concert dure S minutes ?
3. On suppose que le dispositif aléatoire permet de tirer au sort un fragment une unique fois pendant le concert.
 - (a) Quel est le nombre de concerts différents auxquels on peut assister ?
 - (b) Quelle est la probabilité qu'un concert dure S minutes ?
4. On suppose que le dispositif aléatoire permet de tirer au sort le même fragment plusieurs fois de suite et que la performance s'arrête dès que le fragment qui est tiré au sort a déjà été joué deux fois.
 - (a) Quel est le nombre de concerts différents auxquels on peut assister ?
 - (b) Quelle est la probabilité qu'un concert dure S minutes ?
5. On suppose que le dispositif aléatoire ne permet pas de tirer au sort le même fragment deux fois de suite et que la performance s'arrête dès que le fragment qui est tiré au sort a déjà été joué deux fois. (le concert suit les règles de Stockhausen).
 - (a) Quel est le nombre de concerts différents auxquels on peut assister ?
 - (b) Quelle est la probabilité qu'un concert dure S minutes ?

