PROBLÈME 3 : PERMUT'AUTEURS

PARTIE 1. FAMILIARISATION AVEC LES PERMUTATIONS

On considère un ensemble de n éléments $\{e_1,...,e_n\}$ placés dans un tableau à n colonnes. On veut étudier l'ensemble des configurations possibles obtenues lorsque l'on échange les éléments de place. Un tel échange, appelé permutation, peut-être vu comme une fonction $\sigma : \{1,\cdots,n\} \longrightarrow \{1,\cdots,n\}$ qui, à un entier i compris entre 1 et n, associe l'entier j si l'objet e_j se trouve à la case i après l'échange.

Voici un exemple lorsque $n = 5$.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&4&5\\\hline e_1&e_2&e_3&e_4&e_5\\\hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&4&5\\\hline e_2&e_1&e_3&e_4&e_5\\\hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&4&5\\\hline e_2&e_4&e_3&e_1&e_5\\\hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&4&5\\\hline e_2&e_4&e_5&e_1&e_3\\\hline\end{array}$$

La permutation considérée est alors la fonction $\sigma : \{1,2,3,4,5\} \longrightarrow \{1,2,3,4,5\}$ qui à 1 associe 2, à 2 associe 4, à 3 associe 5, à 4 associe 1 et à 5 associe 3. Cette permutation peut être notée sous la forme d'un "tableau", c'est-à-dire : $\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&5&1&3\end{pmatrix}$.

On peut également décrire σ en étudiant les cycles qu'elle contient, c'est à dire les suites de nombres obtenues en itérant σ à partir d'un nombre donné. Par exemple la permutation ci-dessus est composée de 2 cycles :

- Un cycle de longueur 3 car 1 est envoyé sur 2, 2 est envoyé sur 4 et 4 est envoyé sur 1.
- Un cycle de longueur 2, car 3 est envoyé sur 5 et 5 est envoyé sur 3.

On note alors $\sigma = (124)(35)$. Cette notation sous forme de "cycle" doit se comprendre de la manière suivante : l'objet en position i est envoyé sur la position qui apparaît à droite du i dans le cycle. Si la position est tout à droite du cycle, l'objet est envoyé sur la première position. Si la position n'apparaît pas dans le cycle, la place de l'objet reste inchangée.

1. Donner toutes les permutations d'un ensemble à 1 élément, d'un ensemble à 2 éléments, d'un ensemble à 3 éléments et d'un ensemble à 4 éléments.
   Attention, il ne faut pas oublier la permutation qui ne bouge aucun objet : cette permutation est appelée identité.

DÉFINITION. On dit que deux permutations commutent si on peut les effectuer dans un sens ou dans l'autre et qu'on obtient le même résultat.

2. On considère l'ensemble des permutations d'un ensemble à 5 éléments. Les permutations $(1\ 2)$ et $(3\ 4)$ commutent-elles? Les permutations $(1\ 2\ 3)$ et $(4\ 3\ 5)$ commutent-elles?

DÉFINITION. Appliquer une permutation σ à un ensemble donné revient à modifier l'ordre des éléments de cet ensemble. Revenir à l'ordre initial se fait aussi par une permutation, celle-ci est notée σ^{-1} et est appelée permutation inverse.

3. On considère l'ensemble des permutations d'un ensemble à 6 éléments.
   Donner l'inverse des permutations suivantes : $(1\ 2)$, $(6\ 5\ 4)(1\ 2)$, $(2\ 3\ 5)(3\ 6)$ et $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&5&3&2&1&6\end{pmatrix}$.

PARTIE 2. GÉNÉRATEURS

Alix souhaite ranger sa bibliothèque, qui comporte 26 livres de 26 auteurs différents, dont les noms de famille commencent tous par une lettre différente de l'alphabet. Dans la suite, chaque livre sera désigné par l'initiale du nom de son auteur. Par exemple, le livre de Victor Hugo sera référencé par la lettre H. Étant un peu maniaque du rangement, elle a numéroté les emplacements de sa bibliothèque de 1 à 26, chaque emplacement contenant un unique livre. Pour ranger sa bibliothèque, elle va réaliser des permutations.

Alix a fait un exposé sur les "auteurs voyelles", c'est-à-dire les auteurs dont le nom commence par une voyelle. Dans la précipitation, elle a rangé ses livres dans le désordre. La bibliothèque d'Alix se retrouve donc dans la disposition suivante :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
e	B	C	D	y	F	G	H	u	J	K	L	M	N	a	P	Q	R	S	T	o	V	W	X	i	Z

Remarque : la première ligne du tableau indique les numéros des emplacements de la bibliothèque et la seconde donne le livre qui s'y trouve.

Maintenant que l'exposé d'Alix est terminé, elle souhaite de l'ordre dans sa bibliothèque, c'est-à-dire retrouver la configuration suivante :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
a	B	C	D	e	F	G	H	i	J	K	L	M	N	o	P	Q	R	S	T	u	V	W	X	y	Z

Remarque : il n'y a que les "livres voyelles" qui ne sont pas à la bonne place. Nous les avons écrits en minuscules afin de les repérer plus facilement.

1. Écrire la permutation permettant de remettre les livres dans le bon ordre.

DÉFINITION. Une transposition est une permutation qui bouge seulement 2 éléments.

2. Peut-on écrire notre permutation comme "produit" de transpositions ? Autrement dit, peut-on trouver un enchaînement de transpositions qui nous donne notre permutation ? Si oui, donner un enchaînement possible.

DÉFINITION. Un r-cycle est une permutation qui permute circulairement r éléments et laisse fixe les autres. Par exemple, si l'on considère l'ensemble des permutations d'un ensemble à 8 éléments, $(4\ 5\ 6)$ est un 3-cycle : il permute les éléments 4, 5 et 6 et laisse fixe les autres.

Remarque : les 2-cycles sont les transpositions.

3. Peut-on obtenir notre permutation en appliquant seulement les transpositions $(1\ 5)$, $(1\ 9)$, $(1\ 15)$, $(1\ 21)$ et $(1\ 25)$? Si oui, donner un enchaînement possible.
4. Peut-on obtenir notre permutation en appliquant seulement la permutation $(1\ 5\ 9\ 15\ 21\ 25)$ et la transposition $(1\ 5)$? Si oui, donner un enchaînement possible.
5. Peut-on obtenir notre permutation en appliquant seulement les transpositions $(1\ 5)$, $(5\ 9)$, $(9\ 15)$, $(15\ 21)$ et $(21\ 25)$? Si oui, donner un enchaînement possible.
6. Peut-on écrire notre permutation comme "produit" de 3-cycles ? Si non, ne pas donner d'enchaînement mais essayer de comprendre pourquoi.