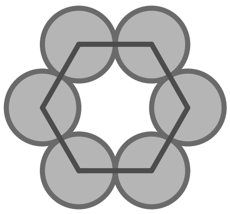
PROBLÈME 1 : PAVAGES ET CRISTALLOGRAPHIE

L'esprit de ce problème est de recouvrir partiellement des n-polytopes convexes réguliers par des n-boules, n étant la dimension. Les n-polytopes convexes réguliers sont simplement les polygones réguliers (triangle équilatéral, carré, pentagone régulier, hexagone régulier, ...) en dimension 2 et les 5 solides de Platon (tétraèdre régulier, cube, octaèdre régulier, dodécaèdre régulier et icosaèdre régulier) en dimension 3. Il s'agit, pour la dimension 3, des formes des dés à 4 faces, 6 faces, 8 faces, 12 faces et 20 faces respectivement. Ces dés sont notamment utilisés dans les jeux de rôle.

PARTIE 1. DIMENSION 2

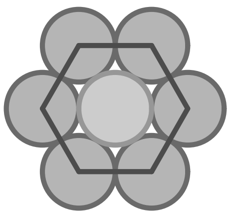
Le problème est le suivant : on place des disques de même rayon, rayon que l'on notera R, tels que les centres des disques soient sur les sommets d'un polygone régulier et que les côtés de mon polygone régulier vaillent précisément $2 \times R$.

Voici par exemple le cas où le polygone régulier choisi est l'hexagone :



Ceci étant fait, on observe que cela délimite une aire, que l'on appellera zone intérieure. La question est de savoir quel est le rayon du plus grand cercle que l'on peut placer dans cette zone intérieure. On notera r le rayon recherché, qui sera donné en fonction de R. On veut donc trouver une fonction f telle que $r = f(R)$.

Voici par exemple le plus grand cercle pour le cas de l'hexagone :



Question : Résoudre le problème pour les cas du carré, de l'hexagone régulier et du triangle équilatéral. Il est fortement recommandé de ne pas commencer par le cas du triangle, celui-ci étant sensiblement plus compliqué que les deux autres.

PARTIE 2. APPLICATION AVEC DES PIÈCES DE MONNAIE

Voici les rayons des pièces de monnaie en euro :

valeur	rayon	valeur	rayon
1 centime	8,125 mm	20 centimes	11,125 mm
2 centimes	9,375 mm	50 centimes	12,125 mm
5 centimes	10,625 mm	1 euro	11,625 mm
10 centimes	9,875 mm	2 euros	12,875 mm

Pour chaque pièce et pour les 3 polygones étudiés dans la partie précédente, quelles sont toutes les pièces que je peux mettre dans la zone intérieure? Si possible, vérifier avec de vraies pièces.

PARTIE 3. DIMENSION 3

Nous allons à présent faire l'analogue en dimension 3. On place donc des boules de même rayon R tels que leurs centres soient les sommets d'un solide de Platon et que les arêtes du solide vaillent $2 \times R$. Ceci étant fait, on observe que cela délimite un volume, que l'on appellera zone intérieure. Quel est le rayon de la plus grande boule que je peux placer dans cette zone? Comme dans la partie précédente, on notera r le rayon recherché et il sera donné comme fonction de R.

Question : Résoudre le problème pour les cas du cube, de l'octaèdre régulier et du tétraèdre régulier. Il est fortement recommandé de ne pas commencer par le cas du tétraèdre, celui-ci étant, comme le triangle, sensiblement plus compliqué que les deux autres.

PARTIE 4. APPLICATION À LA CRISTALLOGRAPHIE

Pour chacun des composés chimiques suivants, en plaçant le plus grand atome de chaque paire aux sommets d'un solide de Platon et le plus petit dans la zone intérieure, indiquer quel solide correspond à chaque composé chimique.

Les composés chimiques à considérer sont : le chlorure (Cl) de sodium (Na), le fluorure (F) de calcium (Ca) et le siliciure (Si) de magnésium (Mg). Le tableau ci-dessous présente les rayons atomiques des atomes concernés :

symbole	rayon	symbole	rayon
Na	190 pm	Cl	79 pm
Ca	194 pm	F	42 pm
Mg	150 pm	Si	111 pm

Remarque : Dans la réalité, l'hypothèse selon laquelle les arêtes des solides de Platon mesurent exactement deux fois le rayon atomique n'est pas toujours strictement vérifiée. Les calculs peuvent donc ne pas être entièrement précis, il faudra donc conclure au plus vraisemblable.