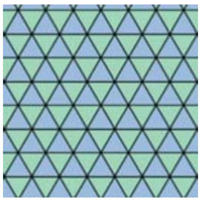
Sujet 8 - Pavages du plan

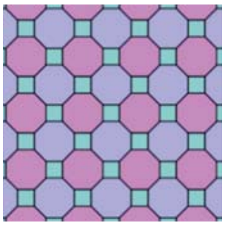
On dit qu'une figure F pave le plan, si en prenant des copies de la figure (toutes de même taille) on peut recouvrir le plan sans laisser de vide et sans que deux copies se chevauchent.

Exemple : le triangle équilatéral pave le plan :



Lorsqu'on considère plusieurs figures F1, F2, ..., Fn on dit qu'elles pavent le plan, si en prenant des copies des figures (au moins une de chaque catégorie) on peut recouvrir le plan sans laisser de vide et sans que deux copies se chevauchent.

Exemple : en prenant deux figures F1 = carré, F2 = octogone régulier (8 côtés de même longueur, 8 angles égaux), on peut paver le plan :



Question 1 :

Un triangle quelconque T étant donné, peut-on paver le plan avec des copies de T ?

Existe-t-il plusieurs façons de faire un pavage du plan avec cette figure ?

Répondre en faisant des dessins (soit à la main, soit avec un logiciel de dessin). Faites un dessin avec un triangle de côtés 2, 3, 4 et avec un triangle de côté 2, 11, 12...

Question 2 :

Un quadrilatère (polygone à quatre côtés) quelconque étant donné, peut-on paver le plan avec des copies de T ?

Distinguer le cas d'un quadrilatère convexe ("quand on suit le périmètre, on tourne toujours à droite, ou toujours à gauche") et le cas d'un quadrilatère non convexe.

Quadrilatère convexe   Quadrilatère non convexe

Pour traiter la question, vous pouvez découper des figures en carton en plusieurs exemplaires (plusieurs exemplaires du même quadrilatère convexe quelconque, plusieurs exemplaires du même quadrilatère non convexe quelconque) et faire des essais.

Faire des dessins pour donner les solutions.

Question 3 :

Peut-on paver le plan avec un pentagone régulier (5 côtés égaux, 5 angles égaux) ?

Justifier votre réponse par un dessin ou par un raisonnement montrant que c'est impossible.

Question 4 :

Existe-t-il des pentagones ayant 5 côtés égaux (mais pas 5 angles égaux) qui pavent le plan ?

Essayez "la petite maison équilatérale" : trois côtés d'un carré pour le sol et les murs, avec un toit en V à l'envers, tels que les côtés du toit soient de même longueur que les murs. Peut-on faire plusieurs pavages différents avec la figure ?

Question 5 :

Existe-t-il des formes polygonales (le périmètre n'est composé d'un nombre fini de droites qui ne se coupent pas, chaque droite ne rencontrant que deux autres droites et cette rencontre se faisant aux extrémités) à 6 côtés qui pavent le plan ?

Même question avec 7 côtés.

Même question avec 8 côtés.

Même question avec 9 côtés.

Même question avec 10 côtés.

Etc.

À chaque fois, faire des dessins.

Peut-on affirmer que pour tout nombre entier *n* plus grand ou égal à 3, il existe une forme polygonale à *n* côtés qui pave le plan ?

Question 6 :

Existe-t-il des formes polygonales ayant 6 côtés de même longueur qui pavent le plan ?

Même question avec 7 côtés de même longueur.

Même question avec 8 côtés de même longueur.

Même question avec 9 côtés de même longueur.

Même question avec 10 côtés de même longueur.

Etc.

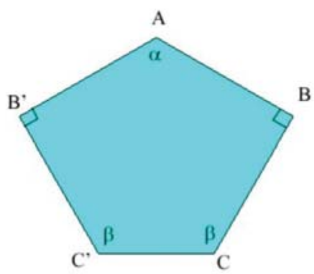
À chaque fois, faire des dessins.

Peut-on affirmer que pour tout nombre entier *n* plus grand ou égal à 3, il existe une forme polygonale ayant *n* côtés de même longueur qui pave le plan ?

Question 7 :

Le pavé du Caire est un pavé à cinq côté défini par un angle alpha, α, et les propriétés suivantes :

- les côtés AB, AB', B'C' et BC ont la même longueur.
- les angles ABC et AB'C' sont droits.



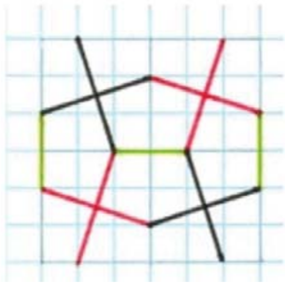
Est-ce que nécessairement les angles B'C'C et BCC' sont égaux ?

Faites plusieurs séries des formes :

(a) l'une avec $\alpha = 120\,°$.

(b) une autre avec $\alpha = 131\,°$ (constatez que la longueur du côté CC' est la même que celle des 4 autres côtés, aux erreurs de mesure près).

(c) L'une basée sur le schéma suivant :



Dans les cas (a) et (c) calculer le rapport entre la longueur des 4 côtés de même longueur, et le cinquième (plus court pour (a) et plus long pour (c)).

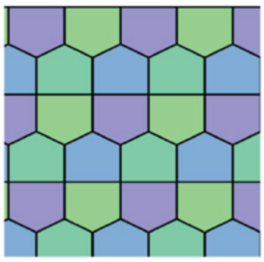
Dans chaque cas (a) (b) ou (c), monter que la figure pave le plan est proposant un dessin.

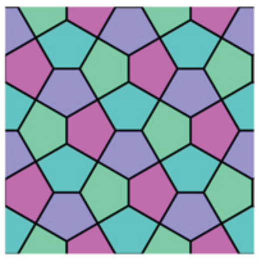
Ce dessin est ce qu'on nomme le pavage du Caire. Il existe donc plusieurs pavages du Caire selon l'angle α. On trouve effectivement ce pavage dans les rues de la ville du Caire, mais aussi en bien d'autres endroits du monde.

Question 8 :

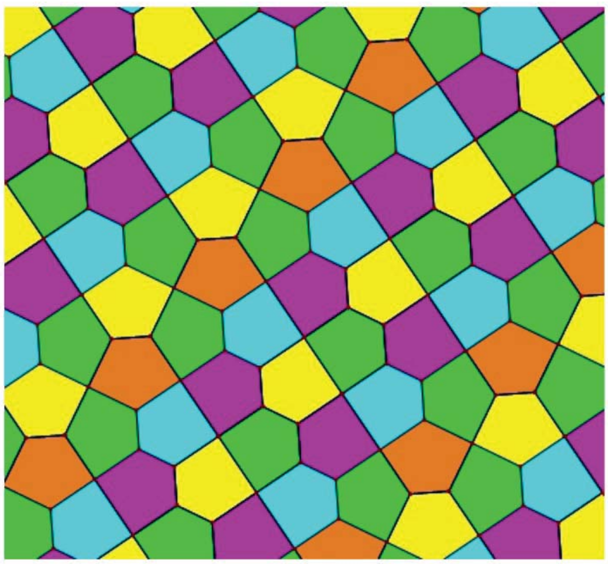
Montrer qu'avec la pentagone "petite maison à toit plat" (elle a trois côtés de même longueur, deux angles de 90°, et trois de 120°, on la notera Penta1) et la figure de la question 7 (a) (on la notera Penta2) on peut réaliser de très nombreux pavages différents les utilisant tous les deux ensemble.

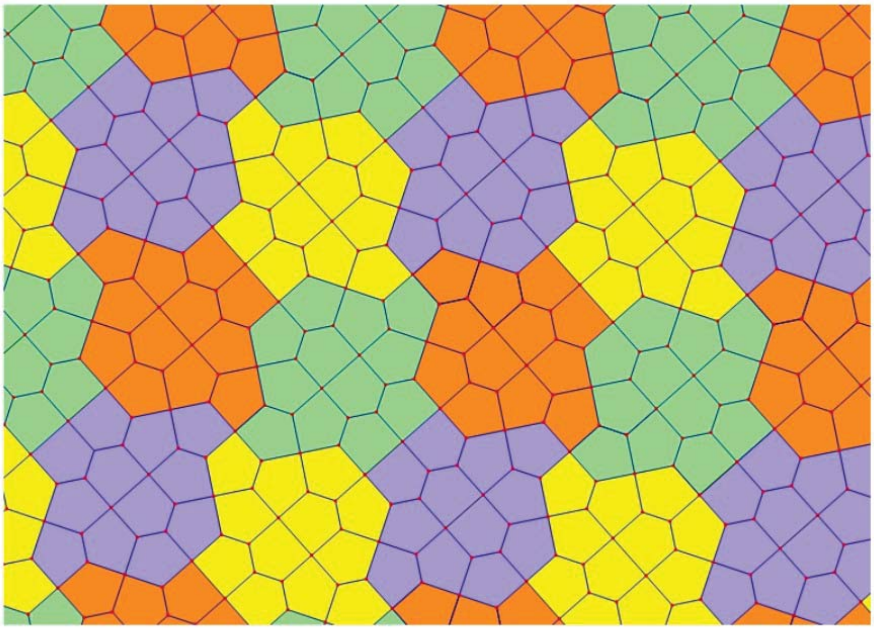
Voici deux exemples, le premiers utilisant uniquement Penta 1 et le second utilisant uniquement Penta2.

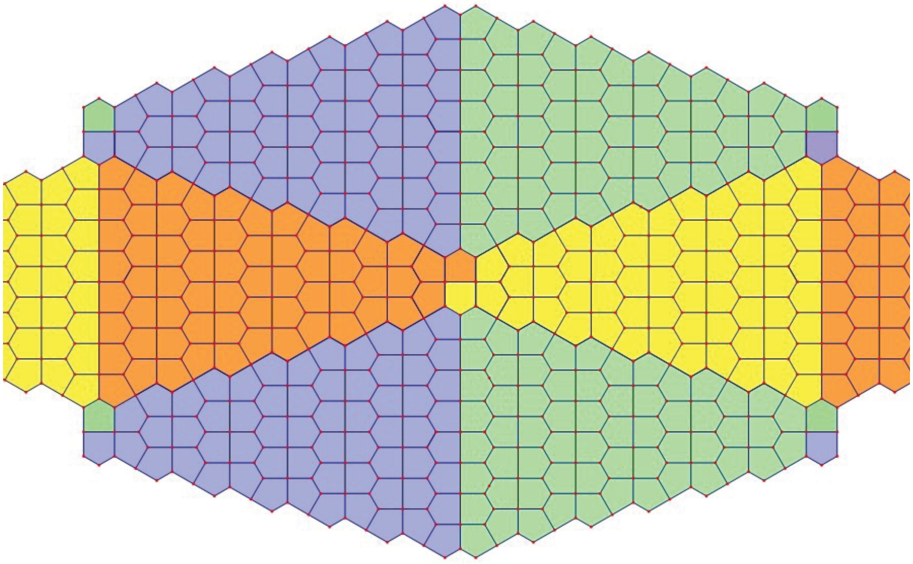




Voici d'autres exemples utilisant à la fois Penta1 et Penta 2.







Il existe bien d'autres possibilités avec Penta1 et Penta 2. Elles ne sont pas toutes connues aujourd'hui. Trouvez-en et dessinez-les soigneusement.

Question 9 :

Trouver d'autres polygones à cinq côté qui pavent le plan qui soient différents de tous ceux déjà rencontrés.