

Sujet 12 - Jeux avec l'infini

Le jeu exige un peu d'imagination, mais à condition d'accepter de croire qu'on peut manipuler des jeux de cartes infinis, et qu'on peut en allant de plus en plus vite réussir une infinité de manipulations en une durée finie de temps, tout est possible... et très mathématique !

Question 1 :

On imagine qu'on dispose d'un jeu de cartes infini dans la main. Chaque carte porte un numéro 1, 2, 3, ... (jusqu'à l'infini). Le jeu qu'on a en main est le jeu complet des cartes 1, 2, 3, ... dans l'ordre.

On enlève une carte et on la brûle. On retire une seconde carte qu'on brûle aussi. Puis une troisième qu'on brûle, etc. jusqu'à l'infini. On imagine qu'on peut aller de plus en plus vite pour faire ces opérations et qu'on a fini cette infinité de destructions de cartes par le feu à un instant qui est midi. Pourtant à midi, on a encore un paquet infini de cartes en main. Comment est-ce possible ?

Réponse pour servir d'exemple :

La première carte retirée et brûlée était la carte numéro 2. La seconde, la carte brûlée était la carte numéro 4. La troisième, la carte numéro 6. La quatrième, la carte numéro 8, etc. À l'infini (c'est-à-dire à midi) il reste en main, la carte 1, la carte 3, la carte 5, etc (toutes les cartes de numéro impair) ce qui constitue un paquet infini.

Si à chaque étape au lieu de brûler la carte enlevée, on l'avait posée sur la table et qu'on avait construit de cette façon un nouveau paquet, alors à midi on aurait eu de deux paquets infinis : dans la main, celui des cartes de numéro impair, et sur la table celui des cartes de numéro pairs.

Se peut-il qu'en opérant un peu différemment on obtienne à midi trois paquets infinis ?

Si vous pensez que oui, décrivez avec précision comment procéder.

Se peut-il qu'on obtienne à midi quatre paquets infinis ? Même chose : décrivez avec précision la méthode si vous pensez que c'est possible.

Plus difficile. Se peut-il qu'à l'infini on obtienne une infinité de paquets infinis ? La réponse est oui et il y a plusieurs façons d'y arriver. Il faut décrire votre solution très précisément en pensant que vous l'expliquez à un ami ou une amie de votre âge qui doit comprendre votre méthode.

Question 2 :

Vous disposez d'une baguette magique qui quand vous frappez la carte portant le numéro n , la transforme en deux cartes : une carte de numéro $n+1$, et une carte de numéro $n+2$.

(a) Partant d'une seule carte portant le numéro 1, peut-on obtenir à midi un paquet infini de cartes numérotées 1, 2, 3, ... jusqu'à l'infini ? (toutes les cartes à partir de 1)

(b) Partant d'une seule carte portant le numéro 1, peut-on obtenir à midi un paquet infini de cartes numérotées 2, 3, 4, 5, ... jusqu'à l'infini ? (toutes les cartes à partir de 2)

(c) Partant d'une seule carte de numéro 1, peut-on obtenir à midi un paquet infini de cartes portant les numéros 2, 4, 6, 8, ... jusqu'à l'infini ? (toutes les cartes de numéro pair)

Question 3 :

Vous disposez toujours de la même baguette magique, mais on vous en donne une seconde qui quand vous frappez deux cartes de numéro a et b avec $b > a$ transforme la seconde en une carte de numéro $b - a$. Exemple, à partir de cartes 3 et 7 la nouvelle baguette magique donne la carte 3 et la carte 4.

Étudiez ce que vous pouvez faire avec ces deux baguettes magiques en partant d'une seule carte.

Question 4 :

Essayez de concevoir une troisième baguette magique qui à partir de la carte 1, vous permette d'avoir à midi le paquet infini 1, 2, 3, ... (toutes les cartes à partir de 1).