

Sujet 11 - Cycles à la bataille

On considère un jeu de N cartes ayant toutes des valeurs différentes représentées par des nombres entiers de 1 à N . Pour $N=5$ les cartes sont donc 1, 2, 3, 4 et 5.

On joue à la bataille avec ce jeu. Les règles sont les suivantes.

- Le paquet est séparé en deux. Les deux paquets ne sont pas nécessairement égaux mais aucun n'est vide. Par exemple Joueur 1 = [2, 1, 3] et Joueur 2 = [4, 5]. On note de gauche à droite les cartes d'un paquet, celle de gauche est celle du dessus.
- Les paquets sont attribués au hasard (à pile ou face par exemple).
- Les paquets de cartes sont tenues face vers le bas. Chaque joueur met sur la table la carte du dessus de son paquet en la rendant visible. La carte la plus forte gagne et le joueur gagnant range les deux cartes sous son paquet en plaçant celle de plus forte valeur en premier. On recommence jusqu'à ce qu'un joueur n'ait plus aucune carte. Celui qui n'a plus de carte a perdu.

Exemple : Situation de départ [2, 1, 3] / [4, 5]

Cartes posées sur la table : 2 contre 4. La carte 4 gagne.

Le joueur 2 range les cartes 4 et 2 sous son paquet en commençant par le 4.

Son paquet devient [5, 4, 2]. La nouvelle situation est : [1, 3] / [5, 4, 2]

On représente le déroulement de ce pli par :

[2, 1, 3] / [4, 5] → [1, 3] / [5, 4, 2]

Si le jeu se poursuit le déroulement de la partie est :

[2, 1, 3] / [4, 5] → [1, 3] / [5, 4, 2] → [3] / [4, 2, 5, 1] → [] / [2, 5, 1, 4, 3]

Ici le joueur 1 n'a plus de cartes, il a perdu.

Question 1 :

Faites la liste de toutes les parties possibles avec un jeu de 3 cartes. Il y a 12 parties différentes. Pourquoi ? Combien de fois le joueur 1 gagne-t-il ?

Exemple : [1, 2] / [3] → [2] / [3, 1] → [] / [1, 3, 2].

Question 2 :

Faites la liste de toutes les parties possibles avec un jeu de 4 cartes en ne prenant en compte que les distributions initiales où les deux paquets ont la même taille. Il y a exactement 24 parties différentes. Pourquoi ? Combien de fois gagne le joueur 1 ?

Exemple : [1, 4] / [2, 3] → [4] / [3, 2, 1] → [4, 3] / [2, 1] → [3, 4, 2] / [1] → [4, 2, 3, 1] / []

Question 3 :

Si après un certain nombre de plis, on est revenu à une situation précédente, on dit qu'on a une "boucle" ; le jeu se poursuivra indéfiniment et personne ne gagnera.

Pourquoi le joueur qui possède la carte la plus forte est-il certain de gagner, sauf s'il y a une boucle ?

Question 4 :

Étudiez la possibilité des boucles pour les jeux avec $N=3$, $N=4$, $N=5$.

(Indication : il y a des boucles possibles pour $N=5$)

Question 5 :

Essayez de trouver des résultats concernant le déroulement du jeu et les boucles pour d'autres valeurs de N .

Question 6 :

On considère maintenant un jeu de cartes avec quatre fois la même valeur pour chaque entier de 1 à N . Pour $N = 3$ le jeu comporte donc les douze cartes 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3. Le jeu usuel de 32 cartes correspond à $N=8$. Le jeu usuel de 52 cartes correspond à $N=13$.

Cette fois il peut y avoir égalité quand deux cartes se rencontrent. On dit alors qu'il y a "bataille". Si cela se produit chaque joueur pose une nouvelle carte et c'est elle qui désigne le gagnant. Si c'est nécessaire, une autre carte encore est utilisée par chaque joueur. Celui qui gagne range toutes les cartes gagnées en commençant par celle qui lui a permis de gagner, puis celle qu'il a prise dans le dernier combat, puis celle des égalités précédentes en les prenant par ordre inverse de leur survenue (parce que c'est commode de procéder de cette façon). Il est important de bien ranger les cartes de cette façon pour pouvoir étudier le jeu.

Exemple : [2, 1, 2, 3, 3, 1] / [2, 1, 3, 3, 2, 1] donne une première bataille 2 contre 2 ; puis une seconde bataille 1 contre 1 ; puis 2 contre 3. Le joueur 2 gagne les six cartes jouées. Il les range sous son paquet dans l'ordre 3, 2, 1, 1, 2, 2. On a alors : [3, 3, 1] / [2, 1, 3, 3, 2, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 2]

Étudiez le jeu pour diverses valeurs de N . Se peut-il qu'une partie soit nulle car les 2 joueurs se retrouvent en même temps sans aucune carte ?

Le joueur qui a les 4 cartes les plus fortes dans son jeu est-il certain de gagner ? Est-ce qu'il peut y avoir des boucles ? Rechercher les parties finies les plus longues possibles pour $N=2$, $N=3$ et $N=4$.