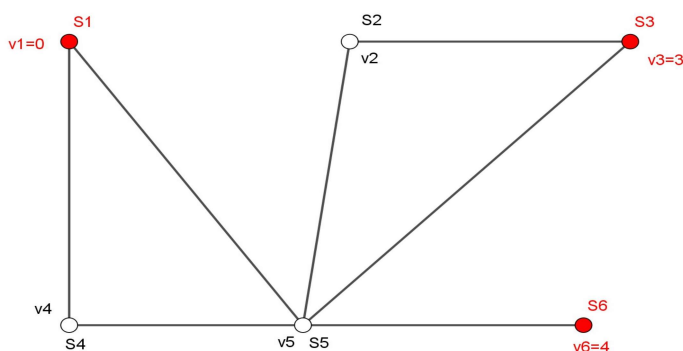


## Sujet 1. Moyennes sur des graphes.

On considère un graphe simple : il s'agit d'un objet constitué de sommets et d'arêtes, chaque arête reliant deux sommets distincts. Entre deux sommets donnés, il y a au plus une arête. Deux sommets du graphe sont dits adjacents s'il existe une arête qui les relie.

On décide de colorer en rouge certains sommets du graphe (pas tous, mais au moins un) et d'attribuer à chaque sommet rouge  $S$  une valeur  $V(S)$ , qui est un nombre réel. Les sommets non colorés seront désormais appelés sommets blancs. On aimerait attribuer une valeur à chaque sommet blanc également, mais avec la règle suivante :

- R. La valeur de chaque sommet blanc doit être égale à la moyenne des valeurs des sommets (blancs ou rouges) qui lui sont adjacents.



Par exemple, dans le graphe ci-dessus, les valeurs  $v_2$ ,  $v_4$ ,  $v_5$  attribuées aux sommets  $S_2$ ,  $S_4$ ,  $S_5$  doivent être telles que :

- $v_2$  est la moyenne de 3 et  $v_5$ ;
- $v_4$  est la moyenne de 0 et  $v_5$ ;
- $v_5$  est la moyenne de 0, 3, 4,  $v_2$  et  $v_4$ .

Revenant au problème général, on pose les questions suivantes.

1. Le problème a-t-il toujours une solution? Peut-on trouver un algorithme qui permet de s'approcher de plus en plus de la solution, si elle existe?
2. Peut-il y avoir plusieurs solutions?

On peut éventuellement traiter la deuxième question avant la première. Il est aussi conseillé de regarder d'abord ce qui se passe pour des cas particuliers simples (par exemple, des graphes avec très peu de sommets blancs).