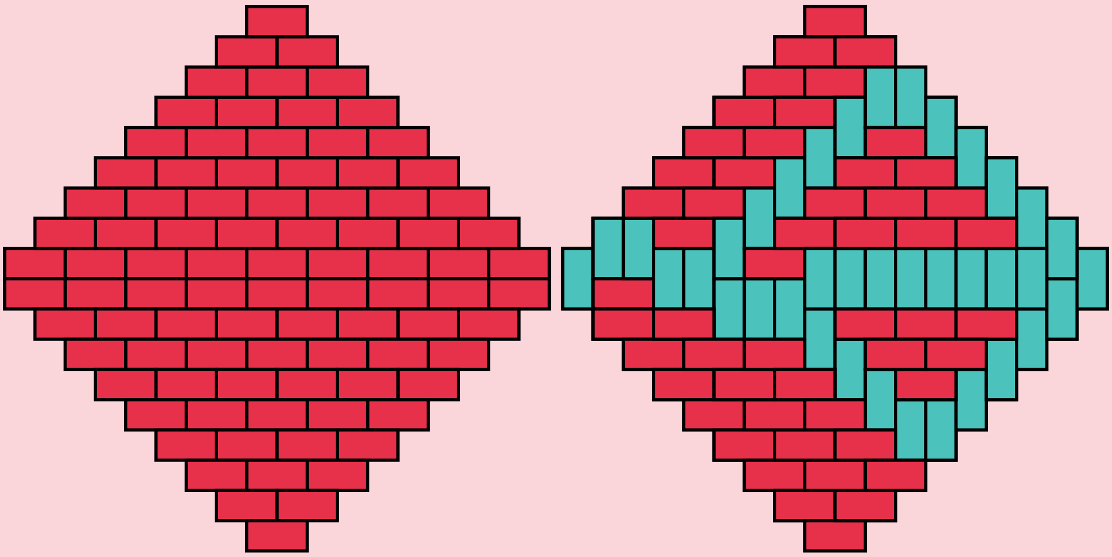
Proposition de sujet

Titre : Pavage de diamants aztèques à l'aide de domino

Problème : Anna et Bob aimeraient paver leur balcon à l'aide de carreaux de 40cm par 20cm. Celui-ci a la forme atypique représentée ci-dessous. Bob commence par le paver comme sur le dessin ci-dessous à gauche puis Anna remarque que les carreaux peuvent aussi être disposés dans l'autre sens et propose un autre pavage ci-dessous à droite.



Bob et Anna se posent alors des questions sur ces pavages : de combien de manières différentes pourraient-ils paver leur balcon ? Est-ce que la forme de leur balcon induit des contraintes sur le pavage ? Si on considère une surface de plus en plus grande, des motifs apparaissent-ils ?

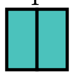
Notions utilisées : programmation, combinatoire, suites

On appellera **domino** un carreau dont la longueur et le double de la largeur. Il s'intéressera donc ici aux pavages de différentes surfaces par des dominos.

I) Premier problème : Pavage d'un rectangle par des dominos

Une première variante pouvant être étudiée est celle du nombre de pavage d'un rectangle de largeur $2 \times \ell$, puis $k \times \ell$. De nombreuses questions y sont reliées :

- À quelle condition sur k et ℓ peut-on paver (c'est-à-dire recouvrir sans laisser de trou) le rectangle ?
- Si k et ℓ sont tels qu'un pavage existe, combien de pavages différents peut-on faire ?

– On observe que quand il y a dans le pavage un carré du type  alors il peut être remplacé par un carré du type  (et réciproquement). On appellera cette opération **retournement**. Peut-on passer de n'importe quel pavage à n'importe quel autre pavage juste avec des retournements ? Si oui, quel est le nombre maximal de retournements à effectuer pour cela ?

Pour nous aider à y répondre, la programmation sera d'une grande aide !

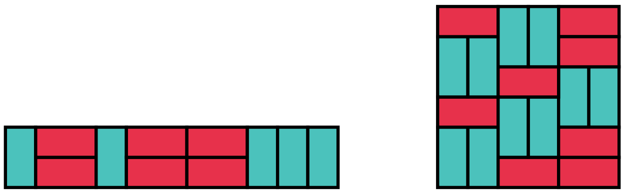
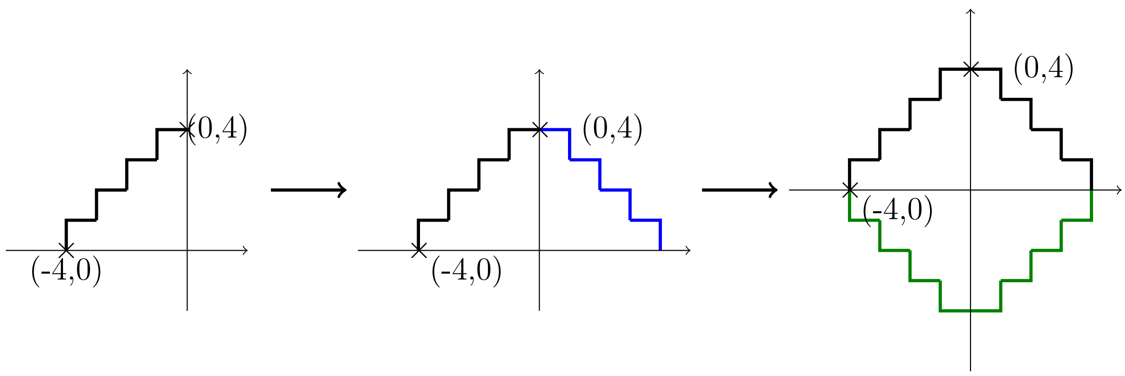


FIGURE 1 – Pavage de rectangles par des dominos (rectangle de taille 2×11 à gauche et 6×6 à droite)

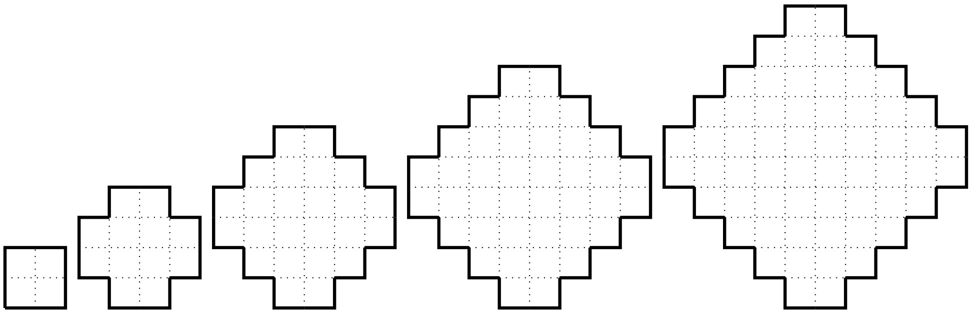
II) Deuxième problème : Pavage d'un diamant aztèque par des dominos

La forme du balcon présentée dans l'introduction est appelée **diamant aztèque**, parce que la moitié supérieure de la forme ressemble à une pyramide aztèque, comme celle ci-dessous.

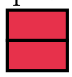
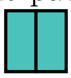
Le diamant aztèque de taille n est obtenu en dessinant dans le plan un escalier à n marches de $(-n, 0)$ à $(0, n)$, puis prenant son symétrique par l'axe des ordonnées puis le symétrique par l'axe des abscisses.



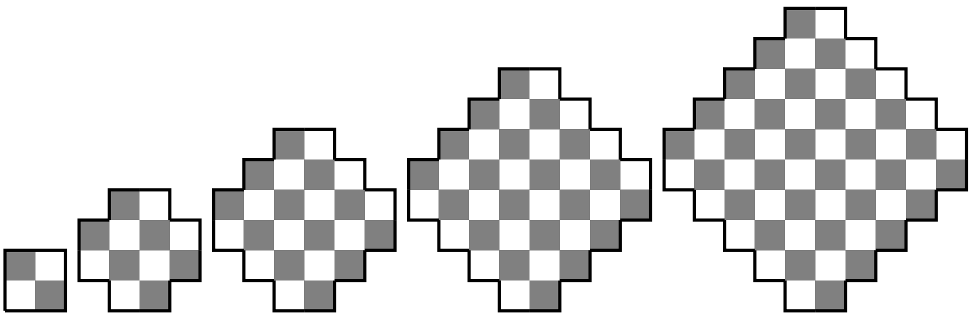
Voici ci-dessous les diamants aztèques de taille 1,2,3, 4 et 5. Le diamant aztèque de l'introduction est un diamant aztèque de taille 9.



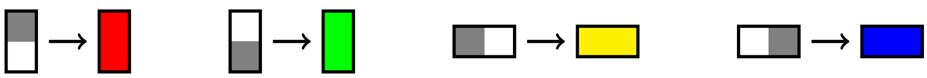
On peut toujours paver (c'est-à-dire recouvrir sans laisser de trou) un diamant aztèque à l'aide de dominos.
Plusieurs questions émergent alors :

- Combien de pavages différents d'un diamant aztèque de taille n peut-on faire ?
- On observe que quand il y a dans le pavage un carré du type  alors il peut être remplacé par un carré du type  (et réciproquement). On appellera cette opération **retournement**. Peut-on passer de n'importe quel pavage à n'importe quel autre pavage juste avec des retournements ? Si oui, quel est le nombre maximal de retournement à effectuer pour cela ?

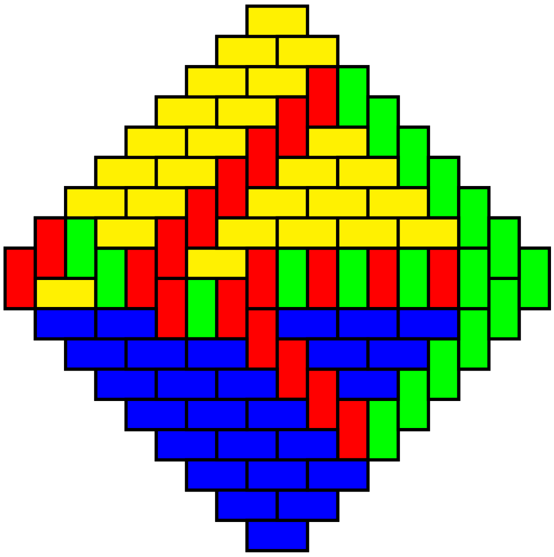
On peut observer que le quadrillage à l'intérieur du diamant aztèque ressemble à un damier. On peut le colorier en blanc et noir comme suit :



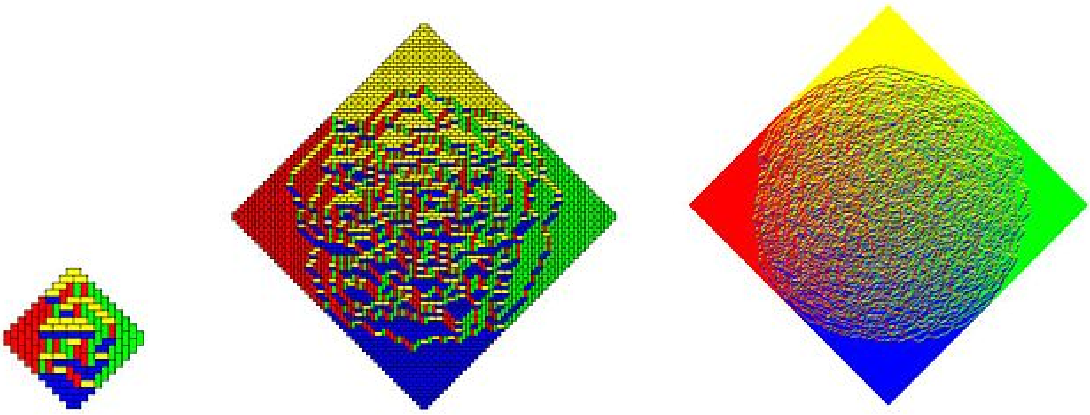
On peut alors colorier chaque domino suivant sa direction et la position du carré noir dans le domino : il y a quatre couleurs possibles.



L'image de l'introduction devient avec ce coloriage :



– Pour n grand, les scientifiques ont observé (et démontré) un phénomène qu'ils appellent le cercle arctique représenté sur l'image ci-dessous (©Partha Dey) :



Pouvez-vous observer sur vos propres simulations ce phénomène ? En avez-vous une explication ?

III) Outils

Cette recherche s'appuiera sur vos connaissances en combinatoire et suites. Il est possible d'explorer les petits cas à la main, mais cela deviendra vite ardu. L'outil clé du chercheur en combinatoire, c'est l'ordinateur : le cœur de ce sujet sera **d'écrire un programme pour générer l'ensemble des pavages possibles** d'un diamant aztèque.

Il y a plusieurs pistes possibles pour l'écriture de ce programme et ce sera à vous d'imaginer comment procéder. Avant de vous lancer sur l'ordinateur, demandez-vous sur des petits cas comment être sûr ou sûre que vous ayez bien trouvé tous les pavages possibles et comment trouver une manière systématique de procéder.

Bonne recherche !