Maths en jean 2024-2025

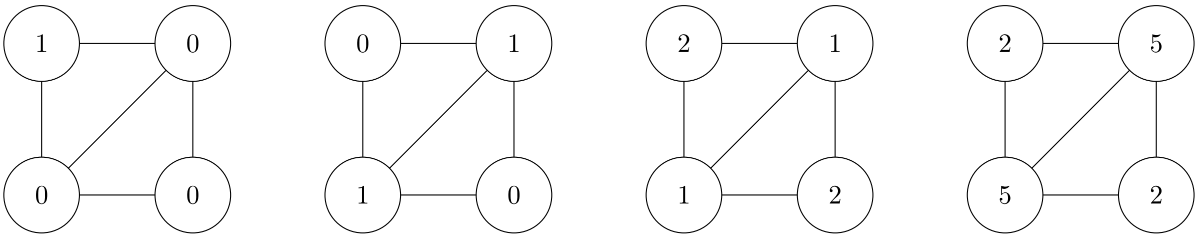
Lycée Jean Rostand, Strasbourg

Florian Viguier et Louise Martineau

1. **Sujet 1 : A la conquête de l'espace**

   Dans une galaxie lointaine, très lointaine, une espèce rêvait de conquérir les étoiles. Malheureusement, elle s'éteignit en laissant derrière elle un dernier espoir : un robot du nom de Matt-E-Jin. Ce robot est capable de se répliquer à l'identique et d'envoyer ses répliques sur toutes les planètes voisines à la sienne. Cependant, après avoir fait ça il tombe à court de ressources et s'autodétruit. En arrivant sur leur nouvelle planète, chacune des copies du robot agit exactement de la même manière : il se réplique à l'identique, envoit les répliques sur les planètes proches puis s'autodétruit. Et ainsi de suite.

   Par exemple, dans la figure suivante les planètes proches sont reliées entre elles et les nombres représentent le nombre de robots sur chaque planète :



   Le cycle de vie d'un robot est d'un siècle.

   On suppose qu'il y a une infinité de planètes numérotées avec les entiers relatifs et que chaque planète a exactement deux voisins. Au départ, il y a un seul robot et il se trouve sur la planète 0. Combien y aura-t-il de robots sur la planète n au bout de k siècles ?

   On suppose maintenant qu'il y a un nombre fini de planètes placées en ligne numérotées de 0 à m. Chaque planète n'est voisine que de deux planètes, ou d'une seule si elle est à l'extrémité. On commence avec un robot sur la planète p et aucun sur les autres. Combien y aura-t-il de robots sur la planète n au bout de k siècles ?

   Même question si les planètes forment un cercle.

   Proposer des pistes de recherche pour approfondir le sujet et les étudier.

2. **Sujet 2 : Une fourmi généreuse ?**

Vous connaissez probablement tous la célèbre fable “La cigale et la fourmi" de Jean de La Fontaine. Elle débute ainsi :

"La Cigale, ayant chanté
Tout l'été,
Se trouva fort dépourvue
Quand la bise fut venue :
Pas un seul petit morceau
De mouche ou de vermisseau.
Elle alla crier famine
Chez la Fourmi sa voisine,
La priant de lui prêter
Quelque grain pour subsister
Jusqu'à la saison nouvelle.
« Je vous paierai, lui dit-elle,
Avant l'Oût, foi d'animal,
Intérêt et principal.» "

La fourmi de La Fontaine n'est pas prêteuse... Mais imaginons que notre fourmi soit un peu plus généreuse. La fourmi dit à la cigale qu'elle va lui donner la moitié de sa récolte de graines. La cigale commence à se confondre en remerciements, mais la fourmi l'interrompt :

« Je ne vais pas vous donner directement la moitié de ma récolte, nous allons plutôt jouer au jeu suivant. Je vais vous donner quelques graines pour commencer, puis, nous allons nous échanger les graines successivement en plusieurs étapes : si vous avez moins de graines que moi, je vous donne autant de graines que vous en avez, et si c'est moi qui ait moins de graines que vous, vous me donnez autant de graines que j'en ai. Nous continuons cette procédure jusqu'à que nous ayons chacune le même nombre de graines, et ainsi c'est comme si je vous avais directement donné la moitié de ma récolte. Qu'en dites-vous ? »

La cigale réfléchit quelques instants, elle essaie de comprendre avec un exemple. « Si la fourmi a 16 graines dans sa récolte par exemple, et qu'elle m'en donne 3 à l'étape initiale, alors j'ai 3 graines et elle 13. J'ai moins de graines qu'elle donc elle me donne 3 graines : je me retrouve avec 6 graines et elle 10 graines. C'est encore moi qui en ai le moins : elle me donne donc 6 graines, ce qui fait que j'ai 12 graines et elle 4. Cette fois-ci, c'est la fourmi qui a moins de graines que moi, je dois lui en redonner 4, et finalement on se retrouve chacune avec 8 graines, soit la moitié de 16. »

La cigale décide alors d'accepter la jeu de la fourmi, se disant qu'elle aura effectivement toujours la moitié de la récolte de la fourmi à la fin du jeu.

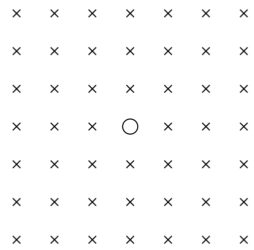
Problématiques :

Est-ce que la cigale finira effectivement toujours par obtenir la moitié de la récolte de la fourmi ? Ou bien est-ce dans certains cas le jeu ne s'arrêtera jamais et la fourmi espère que la cigale finira par abandonner par lassitude ?

Proposer des pistes de recherche pour approfondir le sujet et les étudier.

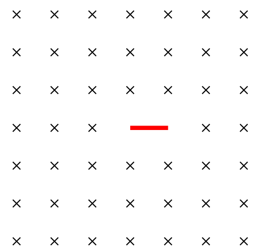
3. **Sujet 3 : Discipline militaire**

Un général particulièrement strict passe en revue ses soldats qu'il place selon un quadrillage régulier (chaque soldat se trouve en un point de $\mathbb{Z}^2 \backslash \{(0,0)\}$). Le général se place en $(0,0)$ et espère ainsi voir tous ses soldats en restant sur place.



Il se rend assez vite compte que certains de ses soldats sont cachés par d'autres. Lesquels ?

Le lendemain, pour remédier à ce problème, il décide de se déplacer lors de son inspection le long du trajet suivant



Il se rend alors compte qu'il voit chaque soldat à au moins un moment de sa ronde, mais que certains soldats se retrouvent cachés par moments. Quels soldats ne seront jamais cachés par un autre soldat lors de la ronde du général ?

Même question si la ronde prend la forme d'un triangle de côtés 1, 1 et $\sqrt{2}$.

Proposer des pistes de recherche pour approfondir le sujet et les étudier.

4. **Sujet 4 : Compétition de gymnastique**

Imaginons que votre lycée organise une compétition de gymnastique, amicale, entre différents établissements. Vous êtes chargé.e d'établir l'ordre de passage des athlètes, et vous procédez de la manière suivante : il y a n athlètes et vous les numérotez de 1 à n. Vous écrivez les numéros $1, 2 \dots, n$ à la suite en ligne, et sous chaque numéro vous tracez une colonne verticale. Vous dessinez ensuite des barres horizontales entre 2 colonnes voisines : vous pouvez en dessiner autant que vous voulez et entre toutes les paires de colonnes voisines que vous voulez. Avec cette configuration, vous réordonnez les athlètes de la manière suivante : pour l'athlète numéro i vous partez du haut de la colonne i, vous descendez cette colonne et dès que vous tombez sur une barre horizontale, vous la suivez pour continuer à descendre. L'athlète numéro i se retrouve finalement en bas d'une colonne, disons la colonne j, et donc l'athlète i passera en j-ième position dans la compétition. Voici un exemple de configuration dans le cas de 4 atlètes, avec 3 barres horizontales :

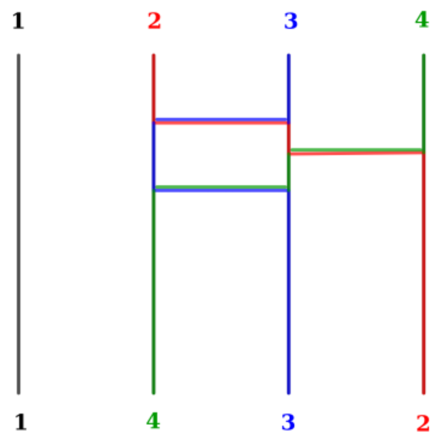


Figure 1

Dans cette configuration, les athlètes $1, 2, 3$ et 4 vont donc passer dans l'ordre $1, 4, 3, 2$.

Première question :

Quel ordre de passage la configuration de la Figure 2 donne-t-elle ?

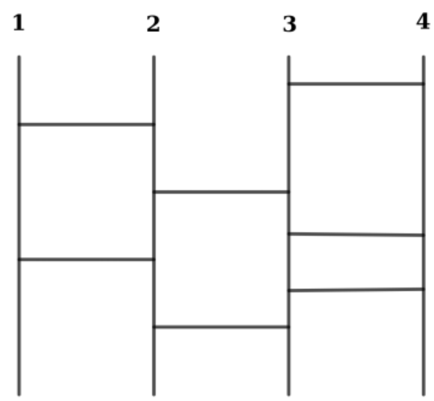


Figure 2

Problématiques :

Peut-on obtenir tous les ordres possibles avec cette méthode ? Si vous souhaitez tricher et imposer un ordre donné à l'avance, est-il toujours possible de trouver une configuration qui réalise cet ordre ?

Proposer des pistes de recherche pour approfondir le sujet et les étudier.

5. **Sujet 5 : Parterre floral**

Vous décidez de redonner vie à votre jardin en le garnissant de fleurs, plus précisément vous avez envie de réaliser un parterre floral de forme polygonale. Pour faire cela facilement, vous avez placé des pics sur votre terrain, de sorte que cela forme un quadrillage carré régulier où chaque petit carré est d'aire 1. Il ne vous reste plus qu'à relier des pics avec un fil droit pour créer une forme polygonale, et à planter vos fleurs sur la surface obtenue.

Malheureusement, vous avez quelques contraintes : vous avez acheté juste assez de fleurs pour recouvrir une surface d'aire 1 ! Vous gardez malgré tout l'envie de réaliser un parterre d'une forme orginale, et vous vous demandez donc quels polygones différents d'aire 1 vous allez pouvoir réaliser. Calculer l'aire d'un polygone d'une forme quelconque peut être un peu long et vous cherchez donc, seul.e face aux pics de votre quadrillage, une méthode rapide pour trouver l'aire d'un polygone, et ainsi déterminer ceux que vous pourrez réaliser avec une aire donnée.

Premières questions :

Voici quelques exemples de polygones d'aire 1 que vous pouvez tracer sur votre quadrillage (les pics sont symbolisés par les points rouges) :

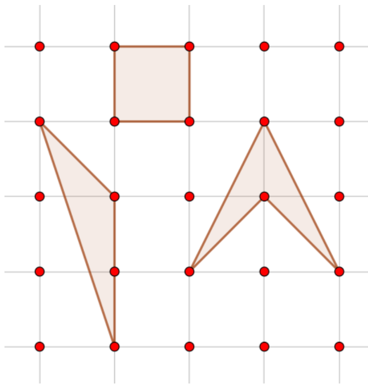


Figure 3

Essayez de dessiner d'autres polygones d'aire 1. Remarquez-vous une caractéristique commune ?

Même question pour des polygones d'aire 2.

Problématique :

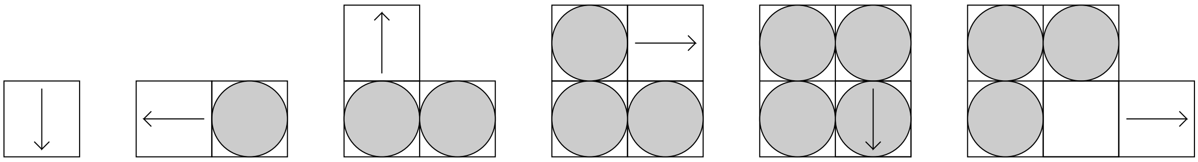
Plus généralement, si vous avez assez de fleurs pour recouvrir une surface d'aire donnée quelconque, pouvez-vous trouver une méthode qui vous permette de calculer rapidement des aires de polygones tracés sur votre quadrillage ?

Proposer des pistes de recherche pour approfondir le sujet et les étudier.

6. **Sujet 6 : Aspirateur détraqué (pour informaticiens aguerris !)**

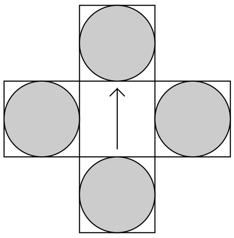
A force de se cogner dans les murs, un pauvre aspirateur autonome finit par complètement se détraquer : lorsqu'il arrive sur une dalle salle, il la nettoie puis se rend sur la dalle à sa gauche. Par contre, si la dalle est propre, il la salit puis se rend sur la dalle à sa droite.

Par exemple, si il est placé dans une pièce totalement propre, voici ses premiers déplacements :



Quel est l'état du carrelage de la pièce après 10 étapes ? Et 100 étapes ?

A un moment, le carrelage est dans cet état



Quelle était l'étape d'avant ?

Proposer des pistes de recherche pour approfondir le sujet et les étudier.