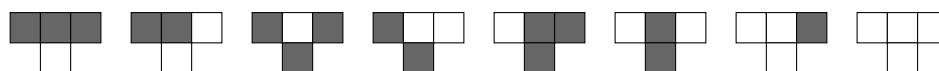


Atelier MATH.en.JEANS 2026-2027

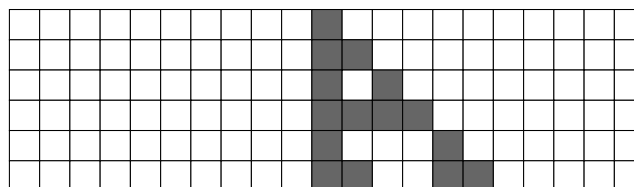
Lycée Pierre Mendès France de Vitrolles
Lycée militaire d'Aix-en-Provence
Kévin Perrot, LIS, Aix Marseille Université

Automates cellulaires élémentaires

En partant d'une ligne de cases coloriées en blanc ou noir, un automate cellulaire élémentaire (ECA) consiste à construire une nouvelle ligne en suivant une règle dite *locale*. Celle-ci donne la nouvelle couleur (blanc ou noir) de chaque case, en fonction de sa propre couleur et de la couleur des cases qui lui sont adjacentes. À partir de la nouvelle ligne on peut réappliquer cette règle... à l'infini. Voici un exemple de règle :



et son application à partir d'une première ligne contenant une unique cellule noire (chaque nouvelle ligne est en dessous de la précédente) :



Le dessin ci-dessus s'appelle un *diagramme espace-temps*.

Classification

L'objectif est de classer les différentes règles locales possibles des ECA, suivant les propriétés de leurs diagrammes espace-temps. Par exemple : sont-ils simples/complexes ? réguliers/irréguliers ? observe-t-on des lignes/translations/symétries ?

- Combien de règles locales différentes peut-on définir ? Les numéroter.
- Définir des classes de diagrammes espace-temps, pour classer les règles locales.
- Est-ce que certaines règles ont presque « les mêmes » diagrammes espace-temps ?

On cherchera à définir mathématiquement nos idées. Voici quelques notations utiles :

- On dira que blanc = 0 et noir = 1.
- La *règle locale* f d'un ECA est une fonction qui associe à chaque triplet $(x, y, z) \in \{0, 1\}^3$, où x est la couleur de la voisine gauche, y est la couleur de la case centrale, et z est la couleur de la voisine droite, une nouvelle couleur (0 ou 1) pour la case en position centrale. Dans l'exemple ci-dessus on a $f(1, 0, 0) = 1$.
- Une ligne ℓ est une *configuration*, et on note $\ell(i)$ la couleur de la case en position $i \in \mathbb{Z}$. On passe à la ligne suivante ℓ' en appliquant la règle locale à chaque position :

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \ell'(i) = f(\ell(i-1), \ell(i), \ell(i+1)).$$

En notant $F(\ell)$ la ligne obtenue à partir de ℓ avec la règle f , on peut parler de $F^{67}(\ell) = F(F(F(\dots F(\ell) \dots))$ qui est la ligne obtenue après 67 itérations de l'ECA.