

Recherche I - Courbes de largeur constante:

Un cercle ou un triangle de Reuleaux sont des courbes planes de largeur constante dans toutes les directions du plan.

- (i) Définir ce qu'on nomme « largeur d'une courbe dans une certaine direction du plan »;
- (ii) Existe-t-il des courbes de largeur constantes dans certaines directions du plan, différentes du cercle et du triangle de Reuleaux, qui limitent une région du plan dans laquelle l'aiguille de Kakeya peut être retournée?
Si oui, donner et construire des exemples. Quelle est leur caractéristique principale ?
Ont-elles toutes des symétries ? Si non, trouver et construire des exemples qui n'en aurait pas.
- (iii) Calculer (le calcul peut-être par approximation numérique) les aires des régions limitées par les courbes que vous avez trouvées.
- (iv) Comment le cercle se distingue parmi les courbes de largeur constante?

Recherche II - Construction et analyse de fractales

1°) La « Courbe de Koch »: un triangle équilatéral est donné de côté égal à 1; on divise chaque côté en trois; et on substitue la partie centrale de chaque côté par deux segments, congruents et de longueur égale au tiers du côté original, qui forment les côtés d'un triangle équilatéral (sans base) et dont le sommet est extérieur au triangle original.

— — — → — ^ —

- (i) Utiliser un logiciel de géométrie dynamique pour itérer ce processus et observer la courbe obtenue.
- (ii) Calculer la longueur $L(n)$ de la courbe à chaque itération pour $n=1$, $n=2$ et $n=3$. S'il est possible, obtenez une formule d'itération qui permet d'écrire $L(n)$ comme fonction du nombre n d'itérations.
- (iii) Calculer le périmètre de la figure déterminée à la n -ième itération. Que se passe-t-il quand n tend à l'infini?
- (iv) Calculer l'aire $A(n)$ de la région limitée par la courbe obtenue après n itérations.
- (v) Calculer l'aire de la région limitée par la courbe obtenue après une infinité de d'itérations.

2°)

(i) Faire une étude semblable à ce qui a été fait au 1°) pour les courbes données dans le livre à la page 127:

- (i-a) l'île de Gosper,
- (i-b) l'empilement d'Apollonius,
- (i-c) le flocon obtenu à partir d'hexagones et les polygones évidés à (i-d) trois et (i-e) cinq côtés suivis de leur cousin à (i-f) sept côtés.

(ii) Faire une recherche au sujet de la dimension fractale d'un objet fractal et en rédiger une définition. Utilisez cette définition pour calculer les dimensions fractales des six courbes explorées en (i).

Recherche III - Cycloïdes:

- (i) Obtenir les équations paramétriques d'une cycloïde, c'est à dire, obtenir les coordonnées d'un point arbitraire d'une cycloïde comme fonctions d'un paramètre t .
- (ii) Obtenir la même chose pour la deltoïde et pour une hypocycloïde quelconque.
- (iii) Obtenir la même chose pour une épicycloïde quelconque.
- (iv) Comment se comportent les courbes construites en (i), (ii) et (iii) en fonction du rapport entre les rayons des cercles extérieur et intérieur.
- (v) Utiliser un logiciel de géométrie dynamique pour construire ces courbes.
- (vi) Créer des animations qui montrent la construction d'une courbe étant donnés les rayons des deux cercles.