

### Sujet 1 : écriture d'un carré parfait

Un entier  $N$  est appelé *carré parfait* si il est le carré d'un nombre entier, c'est-à-dire qu'il existe un entier  $n$  pour lequel on a  $N = n^2$ . Voici le début de la liste des carrés parfaits :

$$0(= 0^2) ; 1(= 1^2) ; 4(= 2^2) ; 9(= 3^2) ; 16(= 4^2) ; 25(= 5^2) ; \\ 36(= 6^2) ; 49(= 7^2) ; 64(= 8^2) ; 81(= 9^2) ; 100(= 10^2) ; \dots$$

Dans ce sujet on s'intéresse au début et à la fin de l'écriture d'un carré parfait. On constate par exemple que parmi les exemples donnés ci-dessus on trouve des carrés parfaits qui se terminent par 1, mais aucun qui se termine par 2. D'où la question : existe-t-il un carré parfait qui se termine par 2 (ou tout autre chiffre) ? On peut ensuite se demander si on peut dire quelque chose sur le nombre formé par les deux derniers chiffres d'un carré parfait.

Il est aussi naturel d'étudier le premier chiffre de ces nombres. Il est facile de voir qu'il existe des carrés parfaits qui commencent par 1, 2, 3 ou 4, mais en existe-t-il qui commencent par 5 (ou tout autre chiffre) ? Plus généralement le nombre formé par les deux ou les trois premiers chiffres d'un carré parfait peut-il être quelconque ?

Quand on connaît la réponse aux questions qui précèdent on peut s'attaquer à un problème 'mixte' : étant donné deux chiffres  $c_1$  et  $c_2$  existe-t-il un carré parfait qui commence par  $c_1$  et qui finit par  $c_2$  ?