

# Sujet Collège et lycée – Les carrelages d’Arthur et de Francine



Arthur, Francine et leurs amis veulent poser un nouveau carrelage dans leur maison.

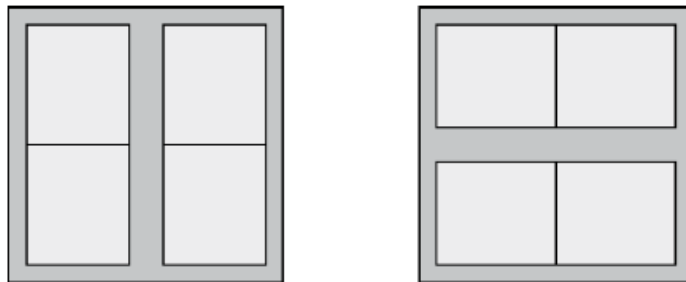
Les carreaux sont tous identiques : ils sont de forme rectangulaire et ont pour largeur 1 et pour longueur 2.



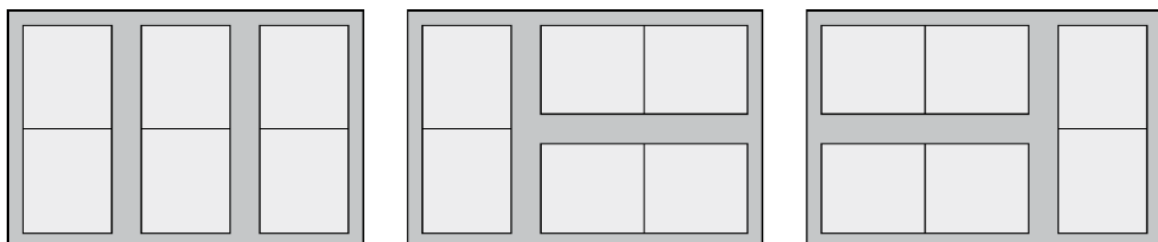
Arthur

**1<sup>ère</sup> situation.** Arthur veut carrelé une pièce rectangulaire de largeur 2 et de longueur  $m$  où  $m$  est un entier.

Si la longueur de la pièce est 2, quelle est la forme de la pièce ? On remarque que, dans ce cas, Arthur peut carrelé la pièce de deux façons.



A présent, la pièce a pour largeur 2 et pour longueur 3. Dans ce cas, Arthur peut carrelé la pièce de trois façons différentes.



Pouvez-vous aider Arthur à trouver toutes les façons de carreler une pièce de largeur 2 et de longueur 4 ? de longueur 5 ? de longueur 20 ?

Dressez un tableau de valeurs et faites apparaître une propriété remarquable. Expliquez le phénomène.

*Indication.* On pourra noter  $F_n$  le nombre de façons de carreler la pièce si celle-ci a pour dimensions  $2 \times n$ , faire apparaître une relation de récurrence, effectuer des recherches sur le célèbre mathématicien Leonardo Fibonacci, et éventuellement, exprimer  $F_n$  en fonction de  $n$ .



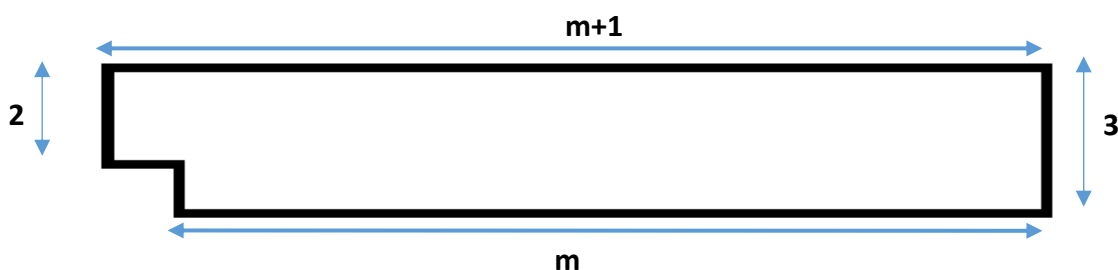
Francine

**2ème situation.** Francine veut quant à elle carreler des pièces de largeur 3 et de longueur  $m$  où  $m$  est un entier.

Dans quels cas sera-t-il possible de carreler la pièce ? On suppose qu'il en est ainsi.

Etudiez comme pour la première situation le nombre de façons de carreler la pièce lorsque la longueur est 4 ? la longueur est 6 ?

A présent, on considère des pièces rectangulaires de largeur 3, auxquelles on ajoute un rectangle de longueur 2 et de largeur 1. Déterminez le nombre de façons de carreler cette nouvelle pièce lorsque  $m$  est égal à 2, à 4, à 6.



Dressez un tableau de valeurs présentant trois colonnes :

- La première colonne désigne la valeur de  $m$
- La seconde colonne donne  $u_m$  le nombre de façons de carreler une pièce rectangulaire de dimensions  $3 \times m$
- La troisième colonne donne  $v_m$  le nombre de façons de carreler la pièce ci-dessus représentée.

Observez, conjecturez et démontrez.

Exprimez  $u_m$  en fonction de  $m$ .