

Allumez la lumière!

La start-up *Lumineuse* a lancé un nouveau type de panneau lumineux sur le marché, composé de lampes carrées individuelles (voir Fig. 1).



Figure 1: Panneau lumineux

Dans chaque rangée ou colonne, les lampes sont connectées entre elles par un interrupteur qui actionne toutes les lampes d'une rangée ou d'une colonne simultanément. Cela signifie qu'avec une seule pression sur un interrupteur, toutes les lampes allumées dans une rangée s'éteignent et toutes les lampes éteintes s'allument. La configuration initiale de chaque lampe (soit allumée, soit éteinte) est toujours choisie au hasard.

Certains clients, tous des mathématiciens bien sûr 😊, ont les questions suivantes:

Questions:

1. Existe-t-il des configurations initiales telles qu'il est impossible d'allumer toutes les lampes?
2. Nous précisons encore un peu notre question: existe-t-il une configuration initiale qui permet d'obtenir
 - a. qu'exactly une lampe soit allumée?
 - b. qu'exactly deux lampes soient allumées?
 - c. qu'exactly trois lampes soient allumées?
3. Est-il possible de passer d'une configuration initiale avec une lampe allumée (dans un coin par exemple) à une autre configuration avec seulement une lampe allumée:
 - a. qui se trouve dans un autre coin (si oui, lequel)?
 - b. au centre d'un côté?
 - c. au centre du panneau?
4. Étudiez également la question précédente dans le cas où 2 ou 3 lampes sont allumées.
5. Que se passe-t-il si vous ajoutez 7 lampes supplémentaires, transformant ainsi le panneau en une grille de 4 x 4?