Une drôle d’addition

Additionner des points sur une courbe

Année 2023 – 2024

Apolline Andrieu-Ernoult, Emma Després, Laura Grégoire, Elise Heurtel-Stievenard, Lindsay Janvier, Yuna Le Bideau, Luann Le Reste, Titouan Pinot, Gwendoline Rey-Suares, Jules Souffez, élèves de seconde, première et terminale

Établissement : Lycée Emile Zola à Rennes

Enseignantes : Emmanuelle Degraeve, Myriam Ledru, Anaik Olivero,

Chercheur : Ronan Quarez.

1. Introduction

1.1. Présentation du sujet

L’objectif est de définir une somme de deux points, M et N, sur une courbe. Le résultat de cette addition est un point P dont la définition varie selon les cas. On notera $\mathrm{M} \oplus \mathrm{N} = \mathrm{P}$.

1.2. Résultats

Selon la courbe choisie et la définition choisie, les propriétés habituelles des sommes sont ou non conservées (associativité, commutativité, élément neutre et opposé). Toutes les additions sur une courbe ne se valent pas.

2. La fonction carré

2.1. Travail avec l’axe des ordonnées

Considérons deux points M et N sur la parabole de la fonction carré. On choisit de définir le point P, tel que $\mathrm{M} \oplus \mathrm{N} = \mathrm{P}$, comme étant le point d’intersection de la droite (MN) avec l’axe des ordonnées.

Nous avons utilisé deux approches, le théorème de Thalès et l’équation de droite, pour trouver une formule qui définit l’ordonnée de P.

2.1.1. Recherche d'une formule avec le théorème de Thalès

On se place dans un repère orthonormé (on a besoin d'une unité de longueur donc il faut que ce soit la même sur les deux axes). Le point M a pour coordonnées $(x_M; {x_M}^2)$ et N$(x_N; {x_N}^2)$. On les choisit distincts.

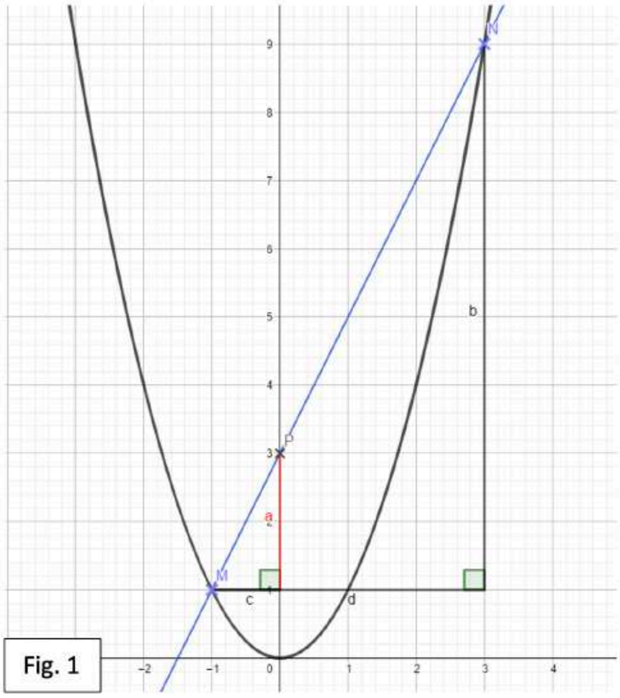

Fig. 1

- 1[er] cas : Si ${x_M}^2 < {x_N}^2$ et les deux points M et N sont de chaque côté de l'axe des ordonnées. (voir fig. 1)

La propriété de Thalès donne ici :$\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$

C'est-à-dire :

$$\frac{-x_M}{-x_M + x_N} = \frac{a}{{x_N}^2 - {x_M}^2}$$

Donc $a = \frac{-x_M \times ({x_N}^2 - {x_M}^2)}{-x_M + x_N}$

Or $y_P = a + {x_M}^2$

$$y_P = \frac{-x_M \times ({x_N}^2 - {x_M}^2)}{-x_M + x_N} + {x_M}^2$$
$$y_P = \frac{-x_M \times (x_N + x_M)(x_N - x_M)}{x_N - x_M} + {x_M}^2$$
$$y_P = -x_M \times (x_N + x_M) + {x_M}^2$$
$$y_P = -x_M \times x_N - {x_M}^2 + {x_M}^2$$
$$y_P = -x_M \times x_N$$

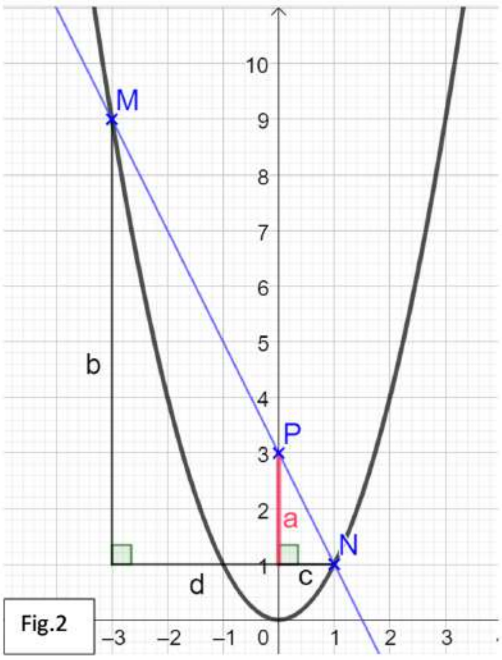

Fig.2

- 2[ième] cas : Si ${x_M}^2 > {x_N}^2$ et les deux points sont de chaque côté de l'axe des ordonnées (voir fig. 2)

même travail en faisant attention aux signes car il s'agit de longueurs (positives) :

$$\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$
$$\frac{x_N}{x_N + (-x_M)} = \frac{a}{{x_M}^2 - {x_N}^2}$$

$$a = \frac{x_N \times ({x_M}^2 - {x_N}^2)}{x_N + (-x_M)}$$

Or $\quad y_P = a + {x_N}^2$

$$y_P = \frac{x_N \times ({x_M}^2 - {x_N}^2)}{x_N + (-x_M)} + {x_N}^2$$
$$y_P = \frac{x_N \times (x_M + x_N)(x_M - x_N)}{x_N - x_M} + {x_N}^2$$
$$y_P = \frac{x_N \times (x_M + x_N)(-1)(x_N - x_M)}{x_N - x_M} + {x_N}^2$$
$$y_P = -x_N \times (x_M + x_N) + {x_N}^2$$
$$y_P = -x_N \times x_M - {x_N}^2 + {x_N}^2$$
$$y_P = -x_N \times x_M$$

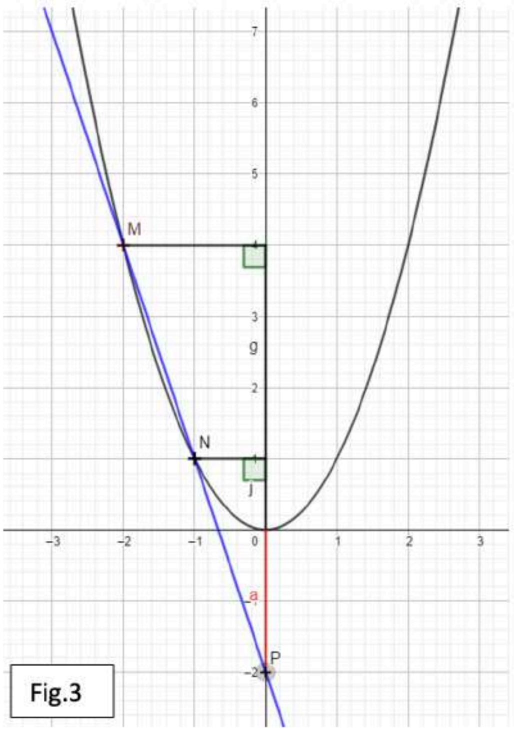

Fig.3

- 3[ième] cas : Si ${x_M}^2 > {x_N}^2$ et les deux points sont à gauche de l'axe des ordonnées

On appelle a la longueur entre P et l'origine du repère.
même travail (Thalès) :

$$\frac{-x_N}{-x_M} = \frac{{x_N}^2 + a}{{x_M}^2 + a}$$

$$x_N({x_M}^2 + a) = x_M({x_N}^2 + a)$$
$$x_N \times {x_M}^2 + x_N \times a = x_M \times {x_N}^2 + x_M \times a$$
$$x_N \times a - x_M \times a = x_M \times {x_N}^2 - x_N \times {x_M}^2$$
$$a(x_N - x_M) = x_N \times x_M(x_N - x_M)$$
$$a = x_N \times x_M$$

Or dans ce cas, $y_P = -a$

$$y_P = -x_N \times x_M$$

Et on peut faire exactement pareil en échangeant les lettres M et N si $x_M^2 < {x_N}^2$

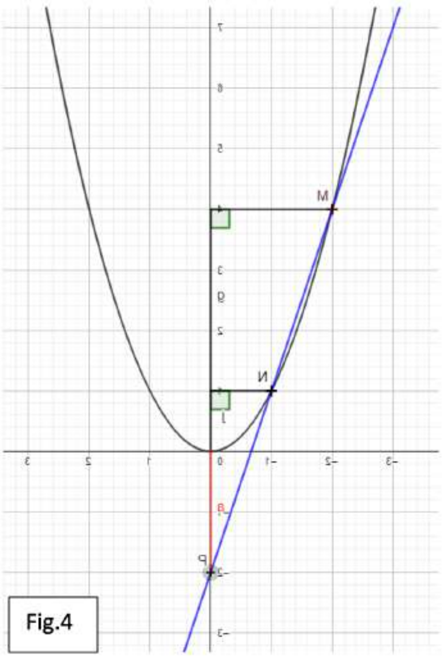

Fig.4

•4[ième] cas Si ${x_M}^2 > {x_N}^2$ les deux points à droite de l'axe des ordonnées

(on a le symétrique du dessin précédent)

$$\frac{x_N}{x_M} = \frac{{x_N}^2 + a}{{x_M}^2 + a}$$

$$x_N({x_M}^2 + a) = x_M({x_N}^2 + a)$$
$$x_N \times {x_M}^2 + x_N \times a = x_M \times {x_N}^2 + x_M \times a$$
$$x_N \times a - x_M \times a = x_M \times {x_N}^2 - x_N \times {x_M}^2$$
$$a(x_N - x_M) = x_N \times x_M(x_N - x_M)$$
$$a = x_N \times x_M$$

Or dans ce cas, $y_P = -a$

$$y_P = -x_N \times x_M$$

Et on peut faire exactement pareil en échangeant les lettres M et N si $x_M^2 < {x_N}^2$

Conclusion : dans tous les cas, quand les deux points M et N sont distincts, on obtient grâce à la propriété de Thalès que : $y_P = -x_N \times x_M$.

2.1.2. Recherche d'une formule avec l'équation de droite

On se place dans un repère orthogonal. Le point M a pour coordonnées $(x_M ; {x_M}^2)$ et N$(x_N ; {x_N}^2)$. On les choisit distincts. (Voir figures 1, 2, 3 ou 4)

On considère la droite (MN) d'équation $y = ax + b$
On sait que $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{x_M^2 - x_N^2}{x_M - x_N} = \frac{(x_M - x_N)(x_M + x_N)}{x_M - x_N} = x_M + x_N$

Le point M est sur cette droite donc $y_M = ax_M + b$ ce qui revient à : $x_M^2 = (x_M + x_N)x_M + b$
Soit $x_M^2 = x_M^2 + x_N x_M + b$
Et on en déduit que $b = -x_N x_M$
L'ordonnée à l'origine de la droite (MN) est $b = -x_N x_M$. Et c'est l'ordonnée du point P recherchée.

Remarque :
La méthode du théorème de Thalès est moins pratique car il faut faire des disjonctions de cas et elle ne fonctionne que dans un repère orthonormé alors que la méthode de l'équation de droite ne requiert qu'un repère orthogonal. En outre la méthode du théorème de Thalès est plus visuelle et plus accessible.

2.1.3 Propriétés avec cette addition

$Commutativité : P = M \oplus N = N \oplus M \ car \ -x_N x_M = -x_M x_N$
$Associativité$: $M \oplus N$ n'est pas un point sur la courbe.
Donc on ne peut pas définir $(M \oplus M) \oplus N$

2.1.4 un moyen de déterminer les nombres premiers

Comme l'ordonnée trouvée pour P est un produit, si on ne s'intéresse qu'aux points M et N à coordonnées entières, on trouvera des points P à coordonnées entières.
De plus, les nombres premiers ne seront jamais atteints si on s'interdit M et N d'abscisses 1 ou -1. (voir figure 5)

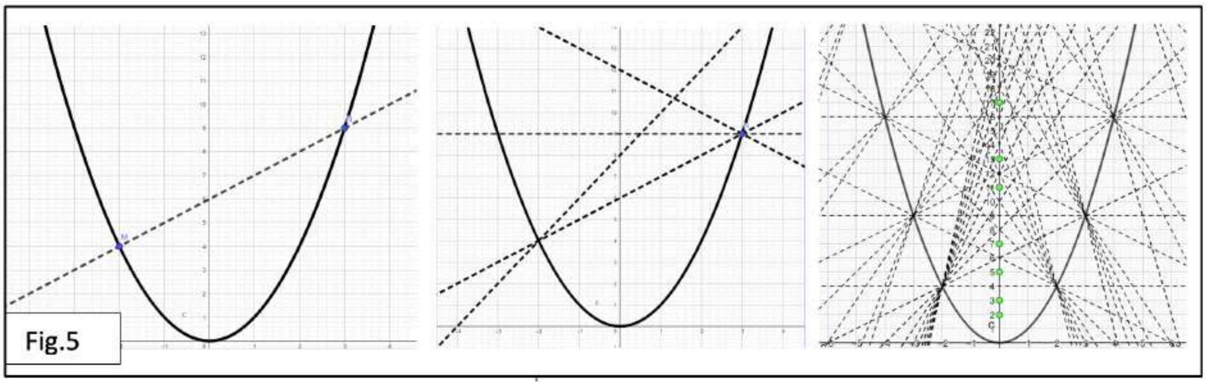

Fig.5

Monsieur Quarez nous a dit que cela s'appelait le crible de Matiyasevich.

2.2. Travail avec l'axe des abscisses

Considérons toujours deux points M et N sur la parabole de la fonction carré. On choisit cette fois de définir le point P, tel que $\mathrm{M} \oplus \mathrm{N} = \mathrm{P}$, comme étant le point d'intersection de la droite (MN) avec l'axe des abscisses.

Nous avons encore utilisé deux approches, le théorème de Thalès et l'équation de droite, pour trouver une formule qui définit l'ordonnée de P.

2.2.1 Recherche d'une formule avec le théorème de Thalès

- 1er cas : Si $y_M < y_N$ et $x_M < x_N$ (voir Fig.6)

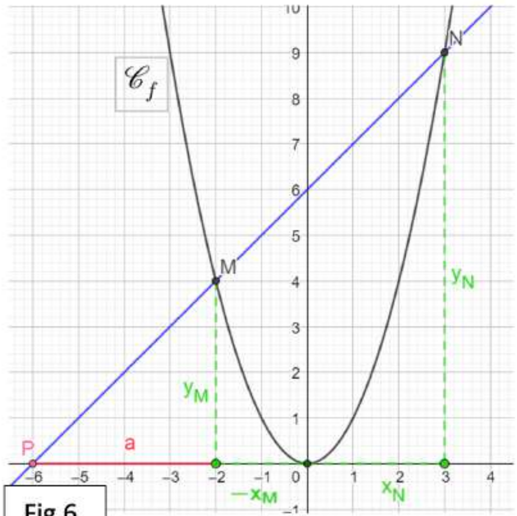

Fig.6

D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{y_M}{y_N} = \frac{a}{a - x_M + x_N}$$

$$y_M(a - x_M + x_N) = y_N a$$

$$a - x_M + x_N = \frac{y_N}{y_M} \times a$$

$$x_N - x_M = \frac{y_N}{y_M} \times a - a$$

$$x_N - x_M = a\left(\frac{y_N}{y_M} - 1\right)$$

$$x_N - x_M = a\left(\frac{y_N}{y_M} - \frac{y_M}{y_M}\right)$$

$$x_N - x_M = a\left(\frac{y_N - y_M}{y_M}\right)$$

$$\frac{x_N - x_M}{\left(\frac{y_N - y_M}{y_M}\right)} = a$$

$$(x_N - x_M) \times \frac{y_M}{y_N - y_M} = a$$

$$\frac{(x_N - x_M) \times y_M}{y_N - y_M} = a$$

$$\frac{(x_N - x_M) \times {x_M}^2}{{x_N}^2 - {x_M}^2} = a$$

$$\frac{(x_N - x_M) \times {x_M}^2}{(x_N - x_M)(x_N + x_M)} = a$$

$$\frac{{x_M}^2}{(x_N + x_M)} = a$$

Or $x_P = x_M - a$, donc :

$$x_P = x_M - \frac{{x_M}^2}{x_N + x_M}$$

$$x_P = \frac{x_M(x_N + x_M) - {x_M}^2}{x_N + x_M}$$

$$x_P = \frac{x_M x_N + {x_M}^2 - {x_M}^2}{x_N + x_M}$$

$$x_P = \frac{x_M x_N}{x_N + x_M}$$

- 2ième cas : $Si\ y_M > y_N$ et $x_M > x_N$ (voir Fig.7)

D'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{y_N}{y_M} = \frac{b}{b - x_M + x_N}$

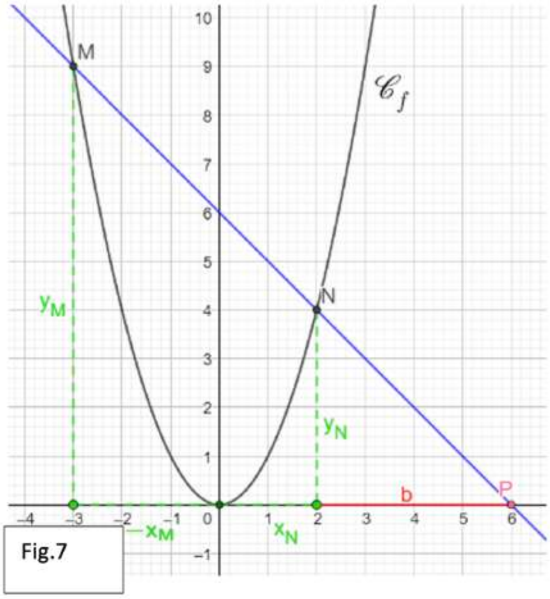

Fig.7

$$y_N(b - x_M + x_N) = y_M b$$
$$b - x_M + x_N = \frac{y_M}{y_N} \times b$$
$$x_N - x_M = \frac{y_M}{y_N} \times b - b$$
$$x_N - x_M = b\left(\frac{y_M}{y_N} - 1\right)$$
$$x_N - x_M = b\left(\frac{y_M}{y_N} - \frac{y_N}{y_N}\right)$$
$$x_N - x_M = b\left(\frac{y_M - y_N}{y_N}\right)$$
$$\frac{x_N - x_M}{\left(\frac{y_M - y_N}{y_N}\right)} = b$$
$$x_N - x_M \times \frac{y_N}{y_M - y_N} = b$$
$$\frac{(x_N - x_M) \times y_N}{y_M - y_N} = b$$
$$\frac{(x_N - x_M) \times {x_N}^2}{{x_M}^2 - {x_N}^2} = b$$
$$\frac{(x_N - x_M) \times {x_N}^2}{(x_M - x_N)(x_M + x_N)} = b$$
$$\frac{-(x_N - x_M) \times {x_N}^2}{(x_N - x_M)(x_M + x_N)} = b$$
$$\frac{-{x_N}^2}{(x_M + x_N)} = b$$

Or $x_P = x_N - b$, donc

$$x_P = x_N - \frac{{x_N}^2}{x_M + x_N}$$
$$x_P = \frac{x_N(x_M + x_N) - {x_N}^2}{x_M + x_N}$$
$$x_P = \frac{x_N x_M + {x_N}^2 - {x_N}^2}{x_M + x_N}$$
$$x_P = \frac{x_N x_M}{x_M + x_N}$$
$$x_P = \frac{x_M x_N}{x_N + x_M}$$

Dans ces deux cas, on en conclut donc que les coordonnées de P sont $\left(\frac{x_M x_N}{x_N + x_M}; 0\right)$

2.2.2 Recherche d'une formule avec l'équation de droite

On sait déjà (voir 2.1.2) que la droite (MN) a pour équation $y = ax + b$
Avec $a = x_M + x_N$ et $b = -x_N x_M$
On cherche le point d'intersection de cette droite avec l'axe des abscisses :
On résout l'équation $(x_M + x_N)x + (-x_N x_M) = 0$
On trouve une unique solution $x = \frac{x_M x_N}{x_N + x_M}$

2.2.3 Propriétés avec cette addition

$Commutativité : P = M \oplus N = N \oplus M\ car\ \frac{x_M x_N}{x_N + x_M} = \frac{x_N x_M}{x_M + x_N}$
$Associativité$: $M \oplus N$ n'est pas un point sur la courbe.
Donc on ne peut pas définir $(M \oplus M) \oplus N$

3. La fonction cube

On se place dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$:
Soient deux points $\mathrm{M}(m; m^3)$ et $\mathrm{N}(n; n^3)$ distincts:
On choisit de définir le point P, tel que $\mathrm{M} \oplus \mathrm{N} = \mathrm{P}$, comme étant le troisième point d'intersection de la droite (MN) avec la cubique

3.1 Recherche d'une formule

On cherche les coordonnées du troisième point d'intersection P de la droite (MN) avec la cubique.

$$\text{(MN)} : y = ax + b$$
$$a = \frac{n^3 - m^3}{n - m} = \frac{(n - m)(n^2 + nm + m^2)}{n - m} = n^2 + nm + m^2$$
$$y = (n^2 + mn + m^2)x + b$$

Pour trouver b on remplace x par m et y par m^3 :

$$b = m^3 - (n^2 + nm + m^2)m = m^3 - n^2m - nm^2 - m^3 = -nm(n + m)$$
$$(\mathrm{MN}) : y = (n^2 + nm + m^2)x - nm(n + m)$$

On cherche les coordonnées des points d'intersection de cette droite avec la cubique.
On résout alors l'équation $(n^2 + nm + m^2)x - nm(n + m) = x^3$

$$x^3 - (n^2 + nm + m^2)x + nm(n + m) = 0$$

On sait que m et n sont solutions donc on peut factoriser sous la forme : $(x - m)(x - n)(x - p)$
On développe:

$$(x - m)(x - n)(x - p) = (x^2 - xn - xm + mn)(x - p)$$
$$(x - m)(x - n)(x - p) = x^3 - x^2p - x^2n + xnp - x^2m + xmp + xmn - mnp$$

On identifie les coefficients pour trouver p:
Le coefficient de x^2 est 0 donc

$$-p - n - m = 0$$
$$p = -n - m$$

On remplace dans l'expression:

$$x^3 - x^2p - x^2n + xnp - x^2m + xmp + xmn - mnp$$
$$= x^3 - x^2(-n - m) - x^2n + xn(-n - m) - x^2m + xm(-n - m) + xmn - mn(-n - m)$$
$$= x^3 - xn^2 - xmn - xm^2 + mn^2 + m^2n = x^3 - x(n^2 + mn + m^2) + nm(n + m)$$
$$Donc\ p = -n - m$$
$$\mathrm{P}(p; p^3)$$

Après discussion avec M. Quarez, le chercheur qui nous encadre, on prend le symétrique de P par rapport à l'origine du repère $\mathrm{P}'(n + m; (n + m)^3)$. C'est aussi un point de la courbe.
On définit l'addition de deux points M et N par:

$$\mathrm{M} \oplus \mathrm{N} = \mathrm{P}'$$

3.2. Propriétés avec cette addition

$$Commutativité : P' = M \oplus N = N \oplus M\ car\ m + n = n + m$$
$$Associativité : M \oplus N\ étant\ sur\ la\ cubique : (M \oplus N) \oplus K = M \oplus (N \oplus K)$$
$$car\ (m + n) + k = m + (n + k)$$
$$Elément\ neutre : M \oplus O = M\ car\ m + 0 = m\ où\ O\ est\ l'origine\ du\ repère$$
$$donc\ le\ point\ O\ est\ l'élément\ neutre$$

$$Opposé : M \oplus -M = O\ \ car\ m + (-m) = 0$$

Cette addition est donc plus intéressante que les précédentes car elle possède les propriétés des additions de nombres.

4. La fonction inverse

Considérons deux points M et N sur l'hyperbole de la fonction inverse. On choisit de définir le point P, tel que $\mathrm{M} \oplus \mathrm{N} = \mathrm{P}$, comme étant le point d'intersection de la droite (MN) avec l'axe des abscisses.

4.1.1. Recherche d'une formule avec le théorème de Thalès

Démonstration dans le cas où $\boldsymbol{x_M < 0\ et\ x_N > 0}$ (voir fig. 8)

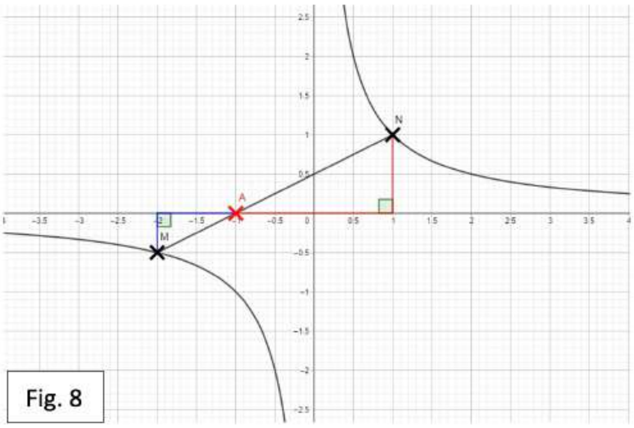

Fig. 8

$$\frac{-x_M + x_A}{-\frac{1}{x_M}} = \frac{x_N - x_A}{-\frac{1}{x_N}}$$
$$(-x_M + x_A)\frac{1}{x_N} = (x_N - x_A)\left(-\frac{1}{x_M}\right)$$
$$\frac{-x_M + x_A}{x_N - x_A} = \frac{-\frac{1}{x_M}}{\frac{1}{x_N}}$$
$$\frac{-x_M + x_A}{x_N - x_A} = -\frac{x_N}{x_M}$$
$$(-x_M + x_A)x_M = (x_N - x_A)(-x_N)$$
$$-x_M^2 + x_A x_M = -x_N{}^2 + x_A x_N$$
$$-x_M{}^2 + x_N{}^2 = x_A x_N - x_A x_M$$
$$x_N{}^2 - x_M{}^2 = x_A(x_N - x_M)$$
$$(x_N + x_M)(x_N - x_M) = x_A(x_N - x_M)$$
$$x_N + x_M = x_A$$

Nous n'avons pas rédigé les autres démonstrations, mais nous avons vérifié avec Géogébra que ça fonctionnait dans tous les cas.

Nous avons appelé cela « la machine à additionner » puisqu'il suffit de tracer une droite et de lire sur le graphique pour trouver la somme de deux nombres.

5. Modélisation avec l'imprimante 3D

Pour concrétiser notre « machine à additionner », nous avons fabriqué avec l'imprimante 3D une plaque avec l'hyperbole de la fonction inverse (Fig.9). Avec des petits plots (fabriqués aussi à l'imprimante 3D) pour placer les points et une pique à brochette pour matérialiser la droite, nous pouvons manipuler.

Nous avons fait cela aussi pour les autres courbes étudiées (Fig.10).

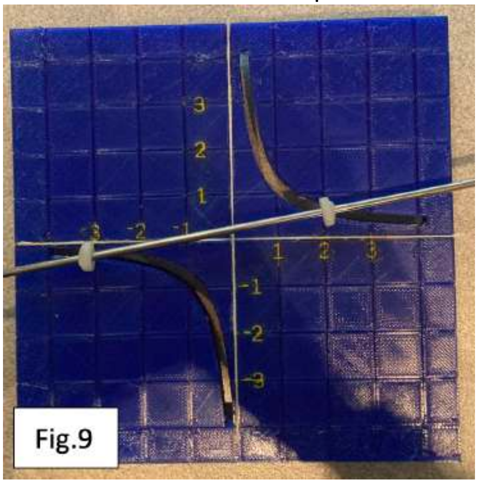

Fig.9

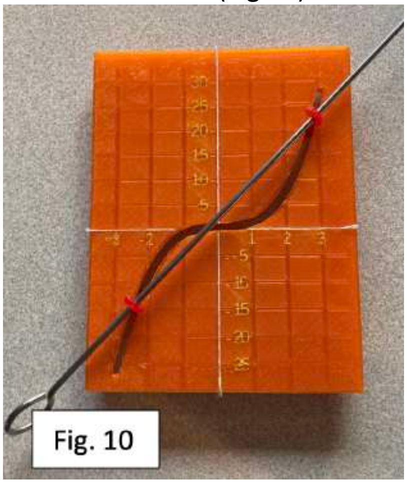

Fig. 10

Pour cela nous avons utilisé le logiciel Openscad (voir début du script figure 11)

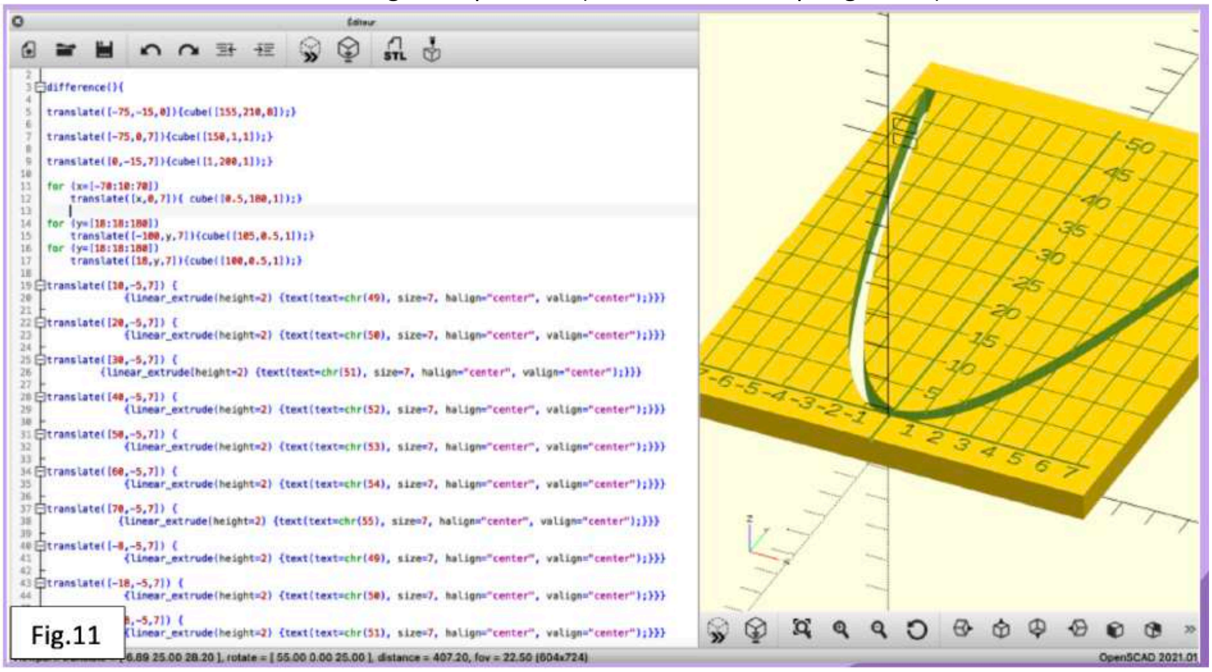

Fig.11