

les tresses

par Yann Olivier, Laurent Houdard, Ouali Dali, lycée Gustave Monod d'Enghien

enseignant : Robert Ferréol

chercheur : Gérard Duchamp, LITP

plan :

Définitions - Notations

Propriétés fondamentales composition, décomposition — le groupe des tresses — générateurs

Propriétés diverses les tresses à 2 brins — simplifications — décomposition en tresse simple / tresse pure

Définitions - Notations

Au départ, une tresse à n fils est un ensemble de n trajectoires continues dans l'espace à 3 dimensions ayant les propriétés suivantes :

- Elles ne se coupent jamais.
- Elles ne reviennent pas en arrière.

Si l'on déplace un fil sans modifier les croisements, les trajectoires changent alors que la tresse reste la même. Plutôt que de considérer les trajectoires, nous considérerons donc la suite des croisements qui forment la tresse.

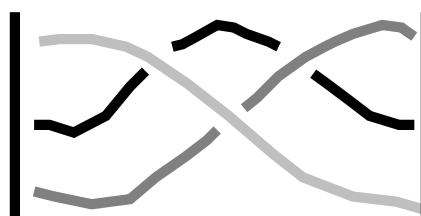
On notera $(a/b, c/d, e/f, \dots)$ la tresse composée des croisements successifs suivants :

a passe au-dessus de b,
c passe au-dessus de d,
e passe au-dessus de f
...

Un brin garde jusqu'à la fin son numéro de départ.

On notera par (0) la tresse sans croisement.

exemple :



... est la tresse $(1/2, 1/3, 3/2)$.

Sur les schémas, un trait continu indique un brin passant "au-dessus" et un trait discontinu un brin passant "au-dessous".

Les brins sont considérés comme étant infiniment extensibles.

On appellera **ordre** d'une tresse le nombre de brins de cette tresse. La tresse ci-dessus (page précédente) est une tresse d'ordre 3.

On appellera **résultat** d'une tresse la permutation associée à cette tresse (mise sous forme de vecteur). Une tresse d'ordre n a $n!$ résultats possibles.

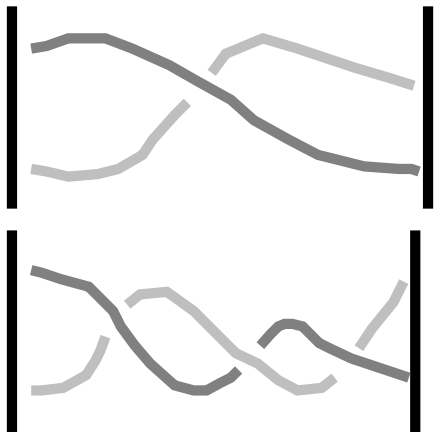
exemple :



... a pour résultat $[4, 1, 3, 2]$ (avec des crochets) : le premier brin va en 4, le deuxième en 1, le troisième en 3 et le dernier en 2.

remarque :

des tresses distinctes peuvent avoir le même résultat.

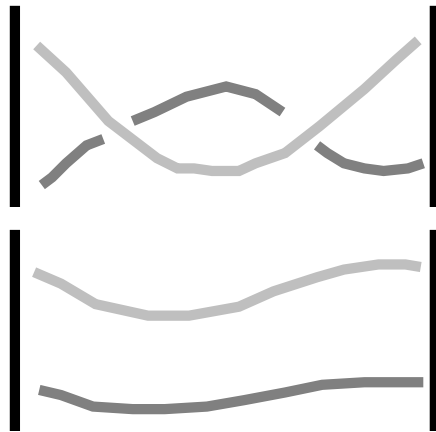


Dans ces deux cas, le résultat est $[2,1]$.

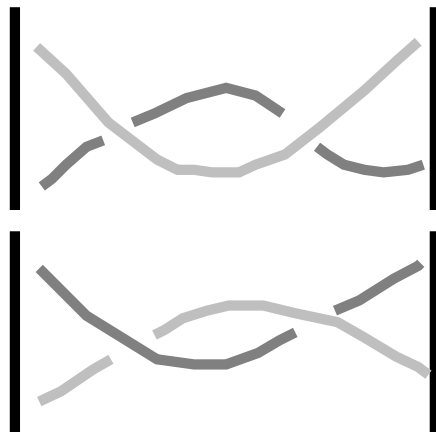
On appellera **cardinal** d'une tresse le nombre de croisements de cette tresse, une fois simplifiée. Une tresse est dite **élémentaire** si son cardinal est 1.

On considère que deux tresses sont égales si l'une est la déformation topologique de l'autre.

Par exemple, les deux tresses suivantes sont égales :



Par contre, les tresses suivantes ne sont pas égales, bien qu'elles aient le même résultat :



Une opération intéressante est la simplification des tresses, c'est-à-dire la recherche de la tresse de plus petit cardinal égale à une tresse donnée. On appellera **tresse première** une tresse ne pouvant pas être simplifiée.

Toutes les tresses ne peuvent pas exister. Ainsi, $(1/3, 1/2)$ est impossible à construire. On peut dégager **la loi** suivante :

une tresse peut exister si et seulement si, une fois décomposée en tresses élémentaires successives (voir plus loin), tous ses croisements a/b sont tels que a et b soient consécutifs.

On voit donc pourquoi $(1/3, 1/2)$ est inexistante.

Propriétés fondamentales

Composition, décomposition

On notera $r(t)$ le résultat d'une tresse t . Relation importante :

$$r(a/a+1) = r(a+1/a) = [a+1, a]$$

On appellera $t * t'$ la tresse résultante des tresses t et t' mises à la suite l'une de l'autre. Il est clair que dans le cas général, $t * t'$ est différente de $t' * t$, mais aussi (hélas) de $s = (t, t')$, tresse composée des croisements successifs de t et de t' . Le problème vient du fait que les brins doivent garder le même numéro. Il faut donc renommer les brins de la deuxième tresse avant de composer :

$$t * t' = (t, r(t)*t').$$

$r(t) * t'$ s'obtient de la manière suivante :

On remplace dans les croisements de t' chaque numéro par le numéro qui se trouve à sa place dans $r(t)$. Par exemple :

$$[1, 4, 2, 3] * (1/2, 1/3) = (1/4, 1/2).(1/4, 1/2)$$

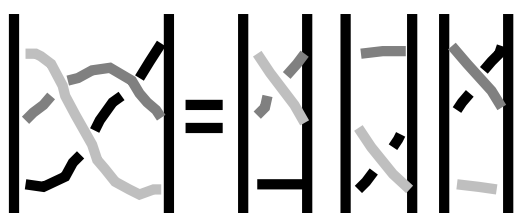
n'existe pas seule, mais existe bien si elle est précédée d'une tresse de résultat $[1, 4, 2, 3]$ (faites un dessin et vous verrez ...).

Inversement, il peut être utile de scinder une tresse en deux tresses de cardinaux inférieurs. On utilisera dans ce cas une notation quotient. On a donc :

$$(1/2, 1/3) = (1/4, 1/2)/[1, 4, 2, 3]$$

Toute tresse peut se mettre sous la forme d'un produit de tresses élémentaires $t_i = (i/i+1)$.

exemple :



$$(1/2, 1/3, 2/3) = (1/2) * (2/3) * (1/2)$$

Le groupe des tresses

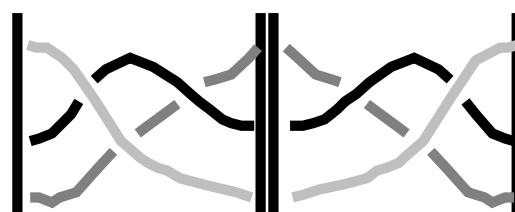
Il est intéressant de noter que l'ensemble des tresses possède une structure de groupe :

— pour une tresse t quelconque :

$$t * (0) = (0) * t = t$$

— il existe une tresse t^{-1} telle que $t * t^{-1} = (0)$: c'est la tresse qui, multipliée par le résultat de t , est formée des mêmes croisements que t , mais dans l'ordre inverse. On l'obtient en regardant t dans un miroir. Par exemple :

$$(1/2, 1/3, 2/3) * (2/1, 3/1, 3/2) = (0)$$



On notera T_n le groupe des tresses à n brins.

Générateurs

T_n , le groupe des tresses à n brins est engendré par les torsions élémentaires $(1/2), (2/3), \dots, (n-1/n)$, c'est-à-dire que toute tresse s'écrit comme produit de ces éléments.

On peut cependant prouver que, **quel que soit $n > 2$, toute tresse peut se décomposer en une combinaison de 2 générateurs seulement.**

Exemple dans T_4 :

Si on note a, b et c les 3 torsions élémentaires, et si l'on prend $A = a$ et $B = abc$:

on sait que $aba = bab$,

que $bc b = cbc$

et que $ac = ca$.

On a : $bB = babc = abac = abca = Ba = BA$ d'où l'on tire $b = BAB^{-1}$. On a donc de plus : $B = abc = ABAB^{-1}c$ d'où $c = BA^{-1}B^{-1}A^{-1}B$.

On a donc retrouvé a, b et c à l'aide de A et B , ce qui prouve que toute tresse s'écrit comme produit de A et de B .

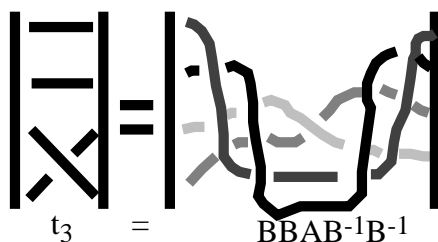
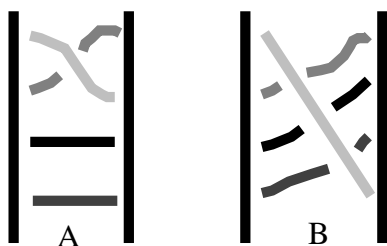
Une écriture plus simple de c peut être obtenue par un raisonnement graphique. En effet, le générateur B équivaut à un passage du premier fil de la tresse au dernier. L'idée consiste donc à faire passer tous les fils supérieurs à un fil n , pour amener ce fil en première position. Ainsi un nœud comprenant ce fil s'écrira soit A , soit A^{-1} . On obtient alors comme écriture de c : $c = BBAB^{-1}B^{-1}$

En généralisant cette méthode à T_n , et en notant $t_i = (i/i+1)$ la torsion élémentaire "le fil i passe au-dessus du fil $i+1$ " ($0 < i < n$), on peut prendre comme générateurs :

$$A = t_1 \text{ et } B = t_1 t_2 \dots t_{n-1}$$

On a alors $t_i = B^{i-1}AB^{-(i-1)}$

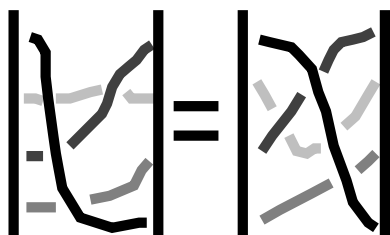
Par exemple, dans T_4 , les générateurs A et B sont les tresses suivantes :



On retrouve alors t_3 comme ci-dessus. A et B vérifient les égalités suivantes :

$$B^n = (BA)^{n-1} \text{ et } B t_i = t_{i+1} B$$

(dessin ci-dessous).



Propriétés diverses

Les tresses à 2 brins

Le groupe des tresses à deux brins est isomorphe à \mathbb{Z} , l'ensemble des entiers relatifs. En effet, toute tresse à deux brins peut se mettre sous la forme $(1/2)^p$ où p est un entier relatif (positif si la tresse est constituée de p éléments $(1/2)$ et négatif si elle est formée de p éléments $(2/1)$).

L'application qui à $(1/2)^p$ fait correspondre p est un isomorphisme.

Simplifications

Voici les lois élémentaires de simplification :

- deux croisements consécutifs semblables s'annihilent : $(a/b, a/b) = (0)$.
- si a, b, c, d sont tous différents $(a/b, c/d) = (c/d, a/b)$.
- de même, si $b > a+1$: $(a, a+1) * (b, b+1) = (b, b+1) * (a, a+1)$.

De ces lois on déduit :

1. Deux croisements semblables a/b , même non consécutifs, peuvent s'annihiler si les croisements intermédiaires ne mettent en jeu ni a , ni b .

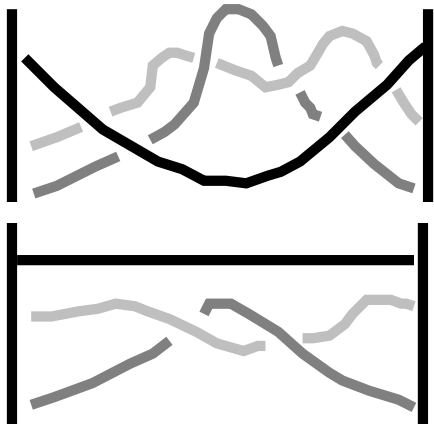
par exemple, $(4/3, 1/2, 2/1, 4/3) = (1/2, 2/1)$ ce qui peut également s'écrire sous la forme : $(4/3) * (1/2) * (1/2) * (3/4) = (1/2) * (1/2)$.

2. Règle du fil libre :

si, dans une tresse un brin passe successivement au dessus (resp. au dessous) de plusieurs autres une seule fois chacun, que ces brins font ensuite des croisements entre eux seuls, et que le premier brin repasse au dessus (resp. au dessous) de ces autres brins une seule fois chacun, les croisements de cette portion de tresse comportant le brin considéré se réduisent à (0) .

exemple :

Les deux tresses suivantes sont égales.

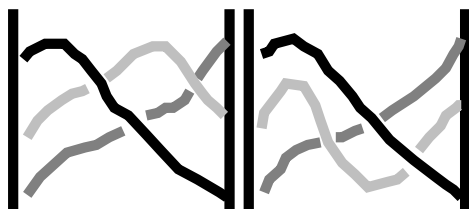


$$3. (a/a+1) * (a+1/a+2) * (a/a+1) = (a+1/a+2) * (a/a+1) * (a+1/a+2)$$

En effet :

$$\begin{aligned} & (a/a+1) * (a+1/a+2) * (a/a+1) \\ &= (a/a+1, a/a+2, a+1/a+2) \\ &= (a/a+1, a/a+2, a+1/a+2, a/a+1, a/a+1) \\ &= (a/a+1, a/a+2, a+1/a+2, a/a+1, a/a+2, a/a+2, a/a+1) \\ &= (a+1/a+2, a/a+2, a/a+1) \\ &= (a+1/a+2) * (a/a+1) * (a+1/a+2). \end{aligned}$$

En clair — pour ceux qui préfèrent les dessins — cela signifie que les deux tresses suivantes sont égales :



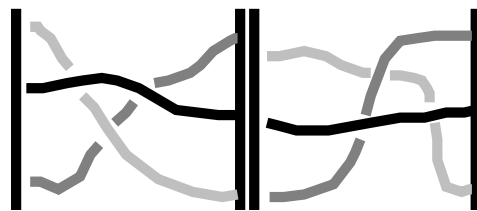
Pour simplifier une tresse, il peut être utile d'intercaler dans la suite des croisements deux nœuds semblables. La tresse n'est pas modifiée.

Décomposition en tresse simple / tresse pure

Une tresse de cardinal n est dite **pure** si son résultat est [1,2, ... ,n].

Une tresse **simple** est une tresse qui comporte le minimum de noeuds possibles pour un résultat donné.

Il n'y a pas unicité de la tresse simple. Par exemple, les deux tresses suivantes sont deux tresses simples correspondant au résultat [3, 2, 1].



Toute tresse peut être décomposée en produit d'une tresse simple et d'une tresse pure.

En effet, pour cela, il suffit de multiplier la tresse T par S⁻¹, puis par S, où S est une tresse simple associée à T. La tresse T * S⁻¹ est bien une tresse pure, et S une tresse simple.

Voici un exemple :

