

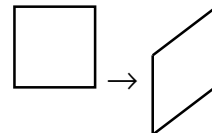
treillis

par Yann Ollivier, lycée Gustave Monod d'Enghien (95)

[NDLR : ce texte est la version “courte” du travail de Yann Ollivier, qu'il afficha dans le forum, pendant le congrès ; son travail est beaucoup plus complet, incluant les démonstrations des résultats décrits, comme en témoigne le commentaire ci-dessous.]

Dans un *forum* où de nombreux groupes exposent les travaux les plus variés, un jeune solitaire propose un imposant dossier sur la rigidité des structures rectangulaires ou *treillis*. Le mémoire de près de 35 pages, particulièrement précis et approfondi (généralisation avec treillis à n dimensions !) présente des résultats nombreux et une méthode particulièrement astucieuse et efficace pour évaluer les degrés de rigidité de telles structures.

Un “carré” de barres articulées peut se déformer :

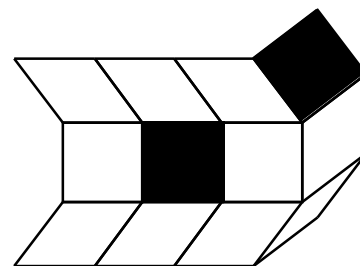


Si on ajoute une barre diagonale, il est rigide :



car les deux barres diagonales donnent le même résultat (on se place dans le plan, interdisant les pliages).

Un *treillis* est une structure “rectangulaire” de tels “carrés” :

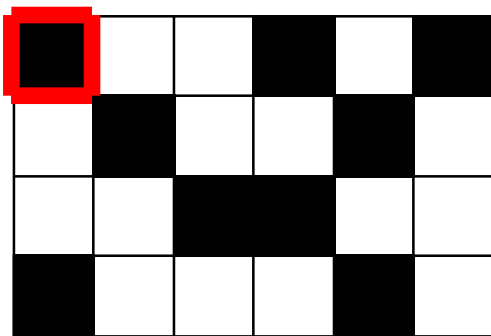


Un treillis est dit *rigide* si aucun de ses carrés ne peut se déformer.

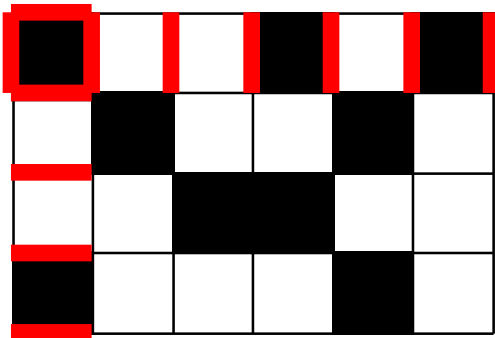
algorithme pour déterminer la rigidité

On prend un carré de référence dont on épaissit les côtés. Partant de ce carré, on épaissit les côtés verticaux de sa ligne et les côtés horizontaux de sa colonne, qui sont parallèles aux siens puisque le treillis est fait de losanges. Quand on rencontre un carré rigide, on peut épaissir les côtés de la ligne et la colonne correspondantes qui sont forcément parallèles aux côtés du carré de référence.

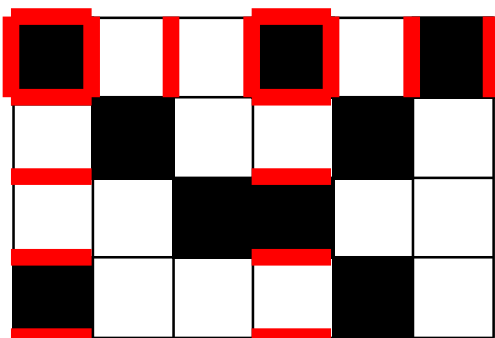
Exemple :



puis



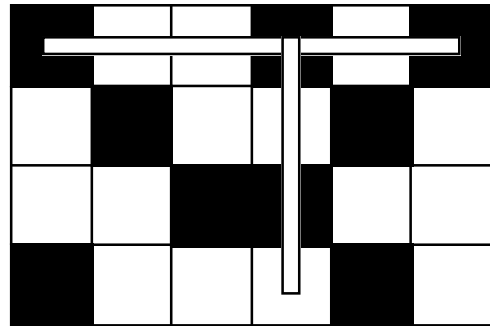
puis



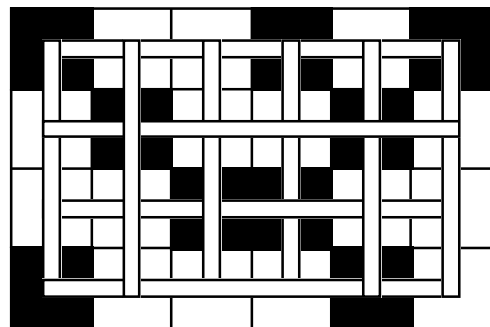
etc. Le treillis est rigide si et seulement si tous les côtés de tous les carrés sont de proche en proche épaissis.

Plutôt que d'épaissir les côtés d'une ligne, il est plus rapide de barrer celle-ci.

Exemple :

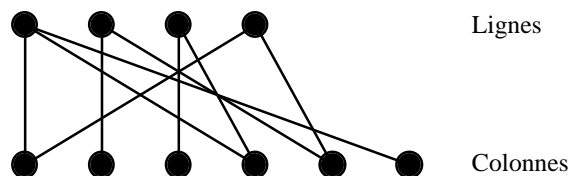


Le treillis est rigide si et seulement si toutes les lignes et colonnes sont barrées :



le graphe d'un treillis

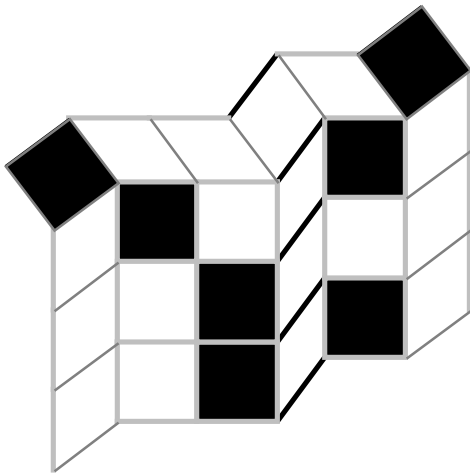
On peut retrouver ce résultat en considérant un graphe comportant deux séries de sommets, une pour les lignes et une pour les colonnes, en reliant une ligne et une colonne si un carré rigide se trouve à leur intersection :



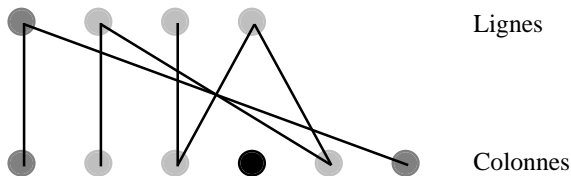
Le treillis est alors rigide si et seulement si le graphe est connexe (composé d'un seul bloc).

Si le treillis n'est pas rigide, le graphe permet néanmoins de déterminer les carrés solidaires d'un carré donné, c'est-à-dire se déformant avec lui : ce sont les carrés représentés par les traits pouvant être atteints à partir du trait représentant le carré étudié. Les lignes et les colonnes sont généralement dépendantes de deux carrés (un verticalement, un horizontalement). On parlera de *régions* du treillis.

Exemple :



Le graphe est :

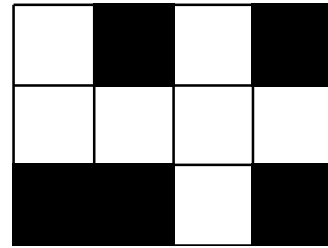


Un carré non rigide est indéformable si et seulement si sa colonne et sa ligne se situent dans la même région : il ne peut pas se déformer en losange.

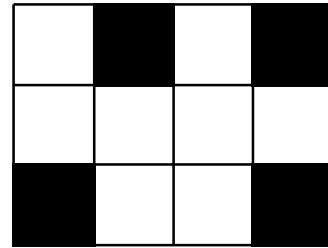
D'autre part, certains carrés rigides sont inutiles : leur suppression n'entraîne pas de changement des possibilités de déformation du treillis.

De tels carrés seront dits *redondants* ; dans le graphe, on observe une boucle, dont un élément peut être supprimé sans entraîner de changement des régions.

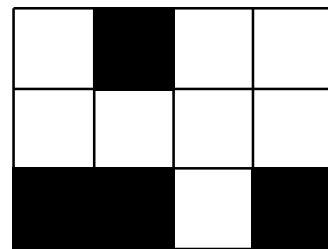
Exemple ...



se déforme de même manière que



ou que



Ces treillis sont dits *équivalents*. On peut ainsi simplifier un treillis, en supprimant le maximum de carrés redondants. Quelle que soit la manière de le simplifier, le nombre de carrés rigides du treillis simple obtenu est le même : on l'appelle nombre de rigidité du treillis de départ, noté r .

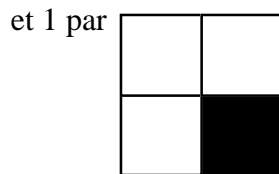
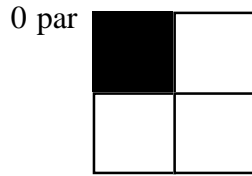
Ce nombre ne varie pas selon le mode de simplification choisi, ni par passage à un treillis équivalent. Si L et $\mathbf{1}$ sont la longueur et la largeur du treillis (nombre de colonnes et de lignes), on démontre que le nombre de régions du treillis est égal à $L+\mathbf{1}-r$. Tous les treillis équivalents ont donc le même nombre de régions, et on peut même démontrer qu'ils ont exactement les mêmes régions.

De plus, pour rigidifier un treillis, il faut et il suffit qu'on dispose d'une manière quelconque mais sans redondance $L+\mathbf{1}-1$ carrés rigides.

calculs logiques à l'aide de treillis

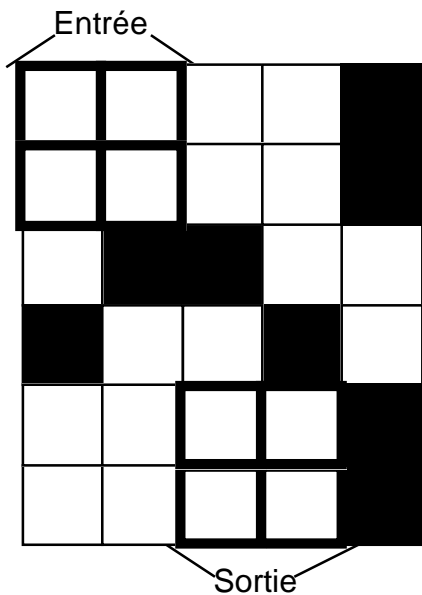
On peut aussi effectuer des calculs logiques à l'aide de treillis, en considérant l'indéformabilité de certains carrés.

Ainsi, si l'on code



Il est aussi possible de construire des treillis à plus de deux dimensions. Les propriétés fondamentales restent inchangées, en particulier la validité de l'outil constitué par le graphe. Cependant la construction de ce dernier est malaisée (il n'est plus biparti mais n -parti en dimension n) et son interprétation ne se fait plus en termes de composantes connexes : la détermination des régions est plus complexe. Néanmoins beaucoup de résultats (sinon tous) restent valables, et une analyse informatique rapide du graphe est possible.

le treillis



transforme l'entrée du haut en son contraire (porte logique "non"). [La dernière colonne sert uniquement à maintenir horizontalement l'entrée et la sortie.]

On peut construire des portes logiques "et", "ou", etc., mais les treillis correspondants sont environ deux fois plus grands.