# Tourner Rouler

Année 2023 – 2024

Reda Abi Ayad, Esteban Dominguez*, Ines Gomez Ferrero, Manuel Gomez Ferrero, Paul Treilhaud (Élèves de première)

(*Redacteur de l'article)

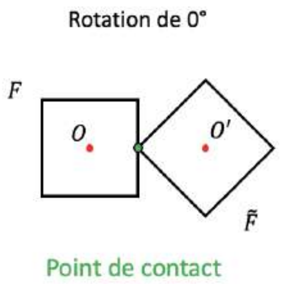
Établissement(s) : Lycée Français de Madrid
Enseignant·e(s) : Jean-Baptiste Ribet, Joseph Sarrassat
Chercheur·Chercheuse(s) : Manon Verbokhaven, LISN – INRIA, Universié Paris-Saclay

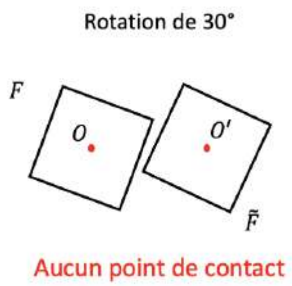
## 1.Introduction

### 1.1. Présentation du sujet

Nous dessinons à main levée et d'un seul trait une forme fermée $F$ dans un espace bidimensionnel avec un centre O qui correspond à son centre de rotation. Nous cherchons à savoir s'il existe une forme $\tilde{F}$ avec un centre de rotation $O'$ tel que nous faisons tourner $F$ et $\tilde{F}$ autour de leurs centres respectifs, il existe toujours un point du contour de $F$ et de $\tilde{F}$ qui se confondent en suivant continûment le contour de $F$.

Pour comprendre, intéressons-nous au cas de deux carrés qui admettent un point de contact en vert :



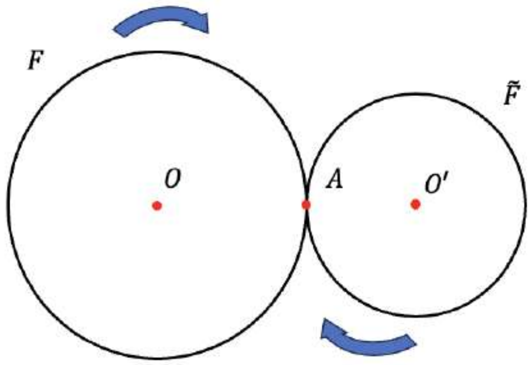

Lorsque nous tournons les deux carrés de 30°, nous voyons qu'ils n'admettent plus un point de contact, donc le carré $F$ n'admet pas de figure $\tilde{F}$ qui soit un carré.

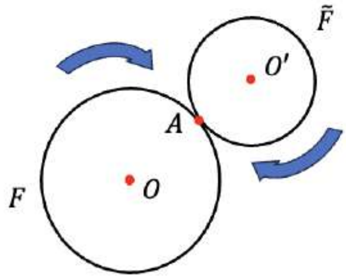
### 1.2. Résultats

Nous nous sommes intéressés à des figures $F$ particulières : Les polygones
Nous avons d'abord trouvé un moyen d'obtenir une forme $\tilde{F}$ à partir de n'importe quel polygone, nous leur avons donner un nom, puis nous sommes parvenus à obtenir formule mathématique pour pouvoir les tracer. Finalement, nous nous sommes intéressés aux vitesses de rotation différentes afin de voir si la figure $\tilde{F}$ existait toujours si $F$ tournait plus vite que $\tilde{F}$.

## 2. Le cas de deux cercles

Si $F$ est un cercle de rayon $r$ et de centre $O$, qui est également son centre de rotation, alors elle admettra toujours un cercle $\tilde{F}$ de rayon $r'$ différent ou égal à $r$, pourvu qu'il ait pour centre de rotation son centre $O'$ et que le cercle soit également tangent à $F$.



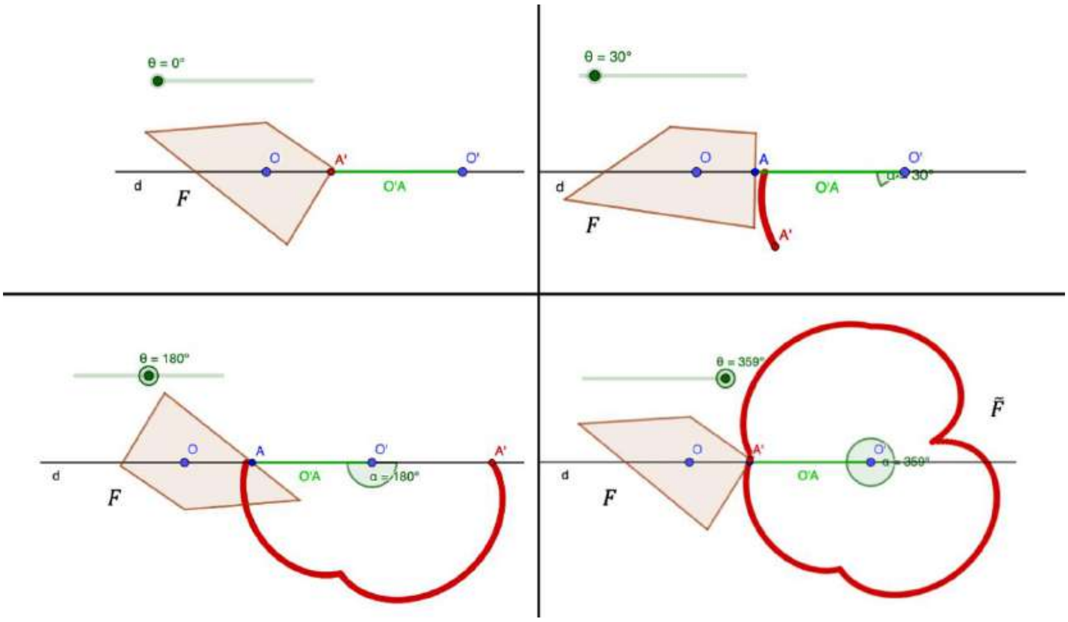

Explication : Quand deux cercles sont tangents, ils se touchent exactement en un seul point, ici le point $A$. Lorsque les cercles sont en rotation autour de leurs centres respectifs, le point de contact reste au même endroit puisque la circonférence de chaque cercle suit une rotation parfaite autour de son centre. Les vitesses de rotation n'affectent pas le cercle $\tilde{F}$ puisqu'elles n'influencent pas la tangence des deux cercles, ni leurs circonférences. En effet, si le cercle $F$ tourne plus vite ou moins vite que $\tilde{F}$, alors comme cette vitesse d'influence n'affecte pas la tangence des cercles, le point de contact $A$ reste fixe, et les deux cercles continuent de se toucher en ce point unique au fur et à mesure qu'ils tournent

## 3. Définition de $\widetilde{F}$ et propriétés

### 3.1. Définition de $\widetilde{F}$

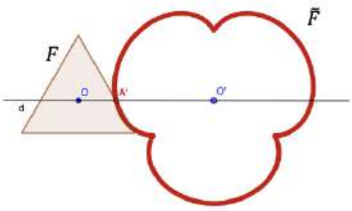
Pour définir $\tilde{F}$, il faut avoir une figure $F$ sur laquelle s'appuyer :
Soit $F$ une courbe continue et fermée et un point $O$ appelé centre de rotation. Soit $O'$ un point dans le repère à l'extérieur de $F$ dans le repère et $(d)$ la droite passant par $O$ et $O'$. Soit $A$ le point d'intersection entre $F$ et $(d)$. Soit $\theta$ l'angle de rotation de $F$ par rapport à $O$. Soit $\mathrm{A}'$ un point qui tourne autour de $O'$ tel que $\mathrm{O'A'} = \mathrm{O'A}$. L'ensemble des points par lesquels passe $A'$ forment une figure qui correspond à $\tilde{F}$.

Cas d’un polygone irrégulier à 4 côtés :



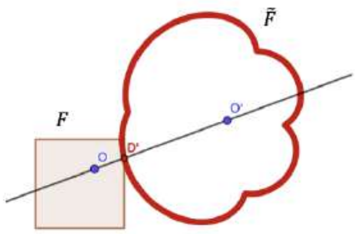

## 3.2. Propriétés

La figure $\tilde{F}$ ressemble à un trèfle irrégulier qui possède des folioles plus grandes que les autres, qui sont parfois asymétriques. Nous avons donc donné le nom de « figure foliée » à $\tilde{F}$, et folioles à un arc d’une figure foliée.



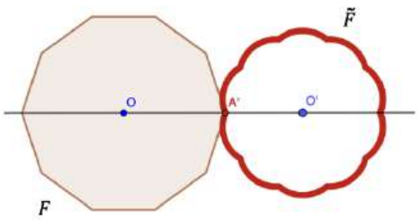

Un triangle équilatéral

3 folioles




Un carré avec un centre de rotation qui n’est pas le centre du carré

4 folioles




Un décagone

10 folioles

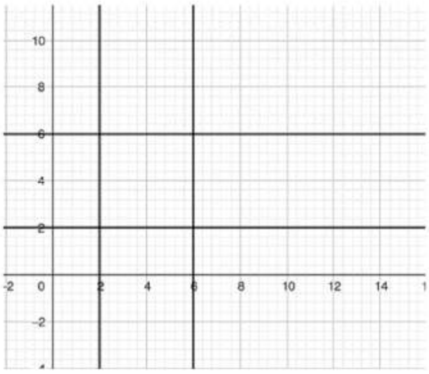
Nous avons déduit que tout polygone fermé qui possède $n$ côtés possède $n$ folioles.

# 4. Tracé de figures foliées

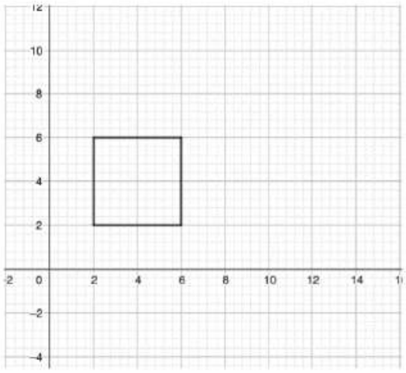
## 4.1. Propriétés

Pour comprendre comment tracer une figure foliée $\tilde{F}$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, il faut d’abord comprendre comment tracer un polygone $F$ dans ce repère. Il est impossible d’avoir un polygone dans un repère à partir d’une fonction unique. Cependant, il est possible de tracer des segments de droites dans un repère avec des égalités. Prenons un exemple avec un carré :

L’exemple d’un carré dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$



$y = 2$
$y = 6$
$x = 2$
$x = 6$



$y = 2 \in [2; 6]$
$y = 6 \in [2; 6]$
$x = 2 \in [2; 6]$
$x = 6 \in [2; 6]$

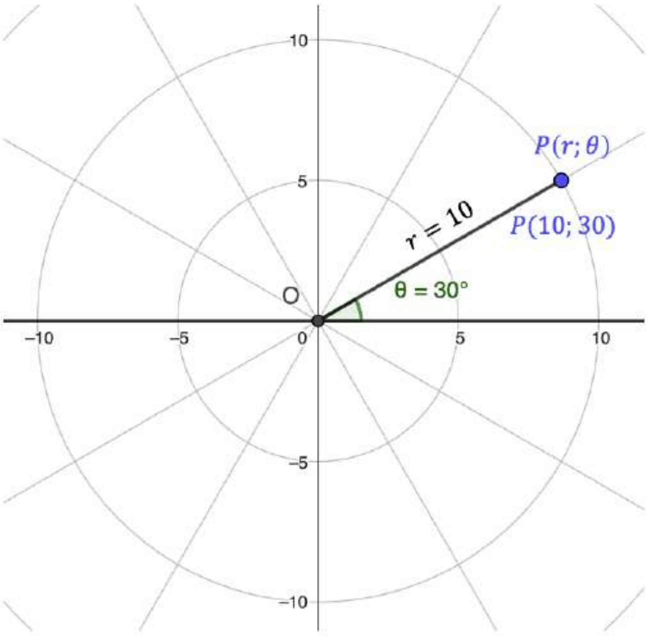
Comme on le voit ici, l’intervalle joue un grand rôle pour tracer un côté. Il permet de nous définir la longueur de celui-ci. Comme nous l’avons vu avant, les figures foliées se tracent à partir d’un ensemble de segments du polygone $F$. Comme pour les polygones, il est donc impossible de tracer avec une fonction unique la figure foliée, mais on peut tracer des folioles à partir d’une fonction d’une fonction avec un intervalle donné que l’on peut déterminer.

## 4.2. Équations polaires

Pour pouvoir obtenir nos folioles, il faut que le point $A'$ se trouve à une distance précise du point $O'$ pour n’importe quel angle $\theta$. Comme $\theta$ est une variable qui influence la distance $O'A'$, nous avons décidé d’utiliser le modèle des équations polaires pour tracer notre foliole.

Une équation polaire est une relation mathématique exprimée en termes de coordonnées polaires $(r; \theta)$ qui définit la position d'un point sur un plan en fonction de son angle et de sa distance par rapport à un point fixe O appelé pôle ou origine.

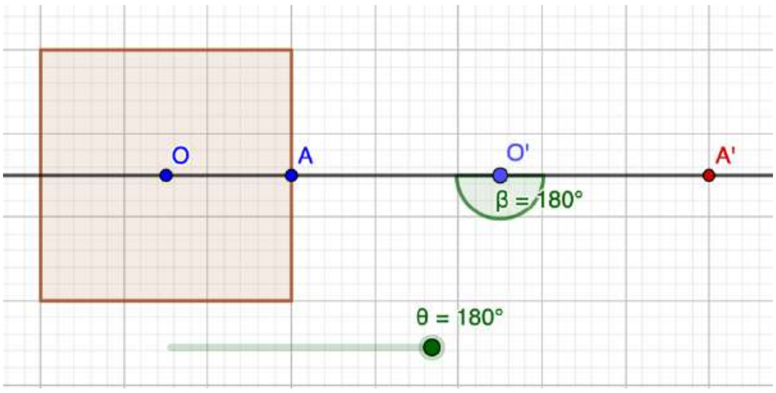
Une équation polaire s'écrit sous la forme $f(\theta) = r$.




Pour un angle donné $\theta$, $f(\theta)$ nous renvoie une distance $r$ par rapport à l'origine correspondante à cet angle particulier.

## 4.3. Équations polaires et folioles

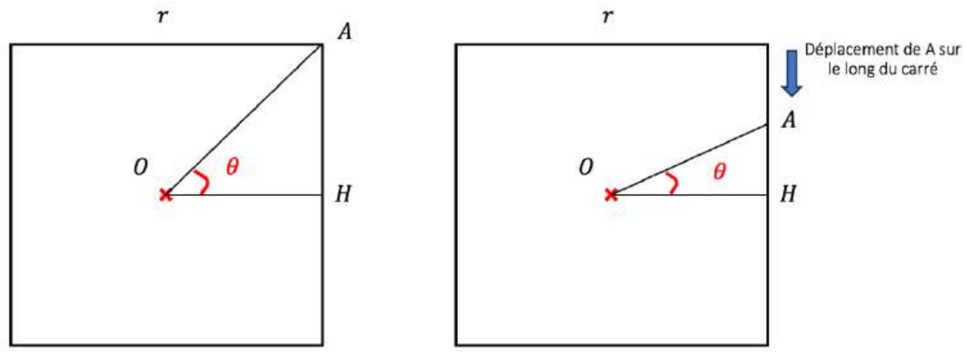
Pour comprendre comment nous sommes parvenus à trouver une équation, nous allons nous intéresser à l'exemple d'un carré $F$ de ce côté $r$ qui a un centre de rotation $O$ qui correspond à son centre.




Si nous parvenons à définir $O'A'$ en fonction de $\theta$, alors nous obtiendrons l'ensemble des points par lesquels passeraient $A'$, c'est-à-dire que nous parviendrions à obtenir l'ensemble des folioles nous de la figure foliée $\tilde{F}$. D'après notre définition initiale, on $O'A' = O'A$, il est possible de définir la distance $O'A$ en fonction de $\theta$ au lieu de la distance $O'A'$. Comme nous voulons exprimer une distance en fonction d'un angle $\theta$, nous avons décidé d'utiliser une équation polaire de la forme $f(\theta) = r$ où $r$ est une distance dans le graphique.

Comme on peut le voir sur la figure du dessus, on peut dire que $O'A = OO' - OA$. Étant donné que $OO'$ est une distance fixe, nous pouvons définir la distance $OA$ en fonction de l'angle $\theta$ afin d'obtenir $O'A$ puisqu'il faudra soustraire cette distance à $OO'$ pour obtenir l'ensemble des points par lesquels passeraient $A'$, c'est à dire tracer l'ensemble des folioles de la figure foliée $\tilde{F}$.

Considérons un point fixe $H$ sur le carré tel que le segment $OH$ soit perpendiculaire à l'un des côtés du carré. Lors de la rotation, nous savons que la distance $OA$ varie. Étant donné qu'il s'agit d'une rotation dans un carré, nous pouvons considérer cette variation de distance comme si le point $A$ se déplaçait le long du carré, sans sortir de celui-ci.




L'intérêt d'avoir un segment perpendiculaire à l'un des côtés du carré est de pouvoir utiliser les lois de trigonométrie puisque les points $OHA$ forment toujours un triangle rectangle. On peut donc définir la distance $OA$ en fonction de $OH$, qui est une distance fixe, et de l'angle $\theta$. On a :

$$cos\theta = \frac{côté\ adjacant}{côté\ opposé} = \frac{OH}{OA} \Leftrightarrow OA = \frac{OH}{cos\theta}$$

Une fois que nous avons défini $OA$ en fonction de $OH$, et de l'angle $\theta$, il nous est possible de définir $O'A$ en fonction de $\theta$ :

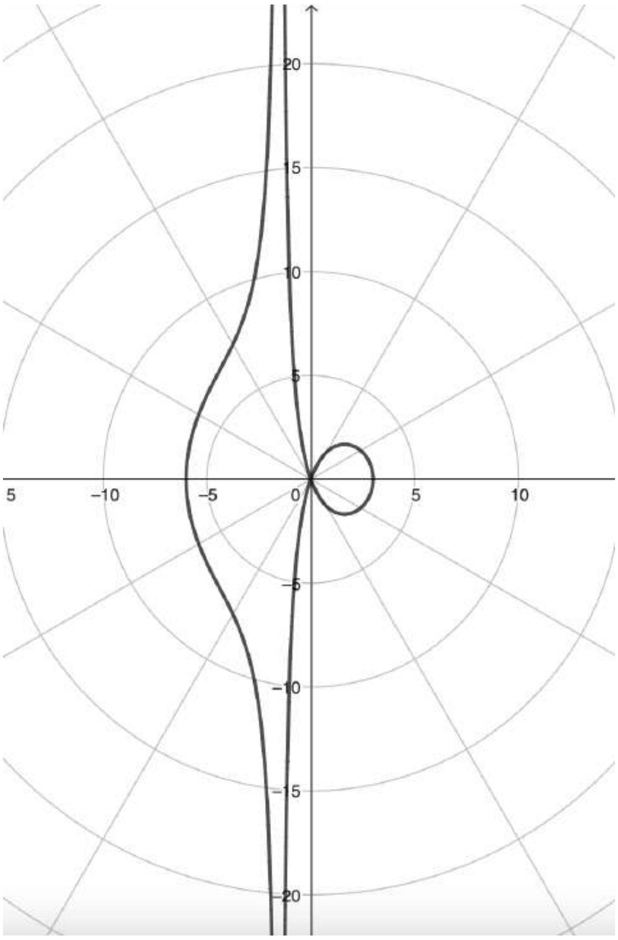
$$O'A = OO' - OA \Longrightarrow O'A = OO' - \frac{OH}{cos\theta}$$

On obtient ainsi l'équation polaire d'une foliole :

$$f(\theta) = OO' - \frac{OH}{\cos\theta}$$

Pour visualiser l'équation dans un graphique, nous allons nous intéresser au même carré, mais cette fois-ci avec des mesures : Ses côtés ont pour mesure $r = 3$, la distance entre les centres de rotation vaut $OO' = 4{,}5$. Comme $r = 3$, alors la distance fixe $OH = \frac{3}{2}$ car $O$ est le centre du carré. On a alors :

$$f(\theta) = 4{,}5 - \frac{\frac{3}{2}}{cos\theta}$$




Nous obtenons cette figure inhabituelle à partir de l'équation polaire que nous avons marquée ci-dessus. On remarque que cette fonction admet une asymptote verticale lorsque $\cos(\theta)$ s'approche de 0, c'est-à-dire lorsque $\theta$ s'approche de $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ car la fonction $\cos(x)$ est $2\pi$-périodique, et donc $f(\theta) = OO' - \frac{OA}{cos\theta}$ est également $2\pi$-périodique. Cela signifie que l'on parcourt toute la figure lorsque $\theta$ parcourt un intervalle de longueur $2\pi$, par exemple $]-\pi; \pi[$.

La courbe possède deux branches qui tendent vers $+\infty$ et $-\infty$ en raison de la division par 0. On obtient donc par somme les limites suivantes avec $k \in \mathbb{Z}$:

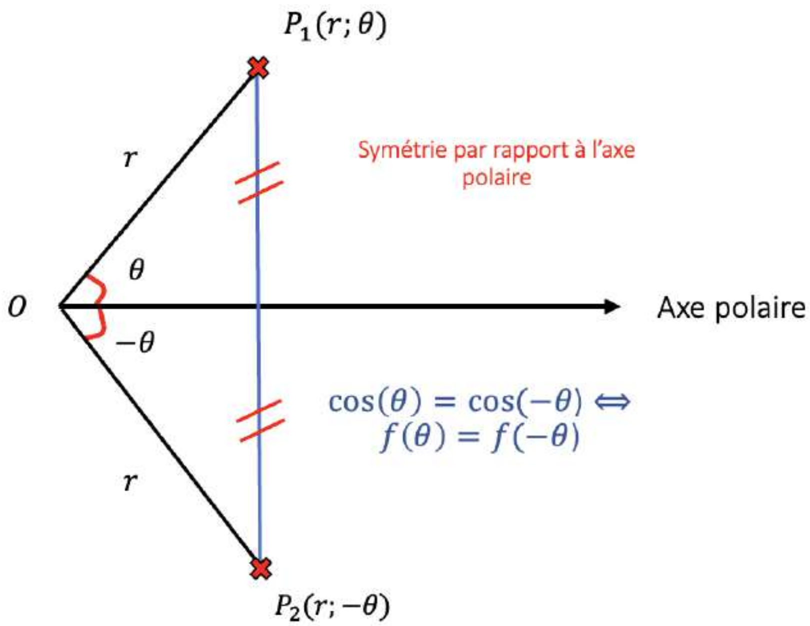
$$\lim_{\theta \to \left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)^{-}} f(\theta) = \lim_{\theta \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-}} 4{,}5 - \frac{1{,}5}{cos\theta} = -\infty$$

$$\lim_{\theta \to \left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)^{+}} f(\theta) = \lim_{\theta \to \left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)^{+}} 4{,}5 - \frac{1{,}5}{cos\theta} = +\infty$$

$$\lim_{\theta \to \left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)^-} f(\theta) = \lim_{\theta \to \left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)^-} 4{,}5 - \frac{1{,}5}{cos\theta} = +\infty$$

$$\lim_{\theta \to \left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)^+} f(\theta) = \lim_{\theta \to \left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)^+} 4{,}5 - \frac{1{,}5}{cos\theta} = -\infty$$

On remarque également que cette figure est symétrique par rapport à l'axe des abscisses. Cela est dû au cosinus de l'angle $\theta$ qui peut prendre des valeurs négatives et comme $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$, alors $f(-\theta) = f(\theta)$. Donc si l'angle $\theta$ est négatif, le cosinus de $\theta$ sera le même que son angle opposé, et donc la distance $r$ sera la même par rapport à l'origine, ce qui explique la symétrie par rapport à l'axe polaire.




## 4.4. Intervalle des folioles

Ce qui nous intéresse surtout dans la figure précédente, c'est la partie de la foliole. Comme pour tracer un polygone dans un repère, il faut donner un intervalle à l'équation polaire pour obtenir la foliole d'un côté de ce carré. Dans la figure précédente, la foliole correspond à la partie circulaire de droite. On cherche alors son intervalle :

IMAGE 1

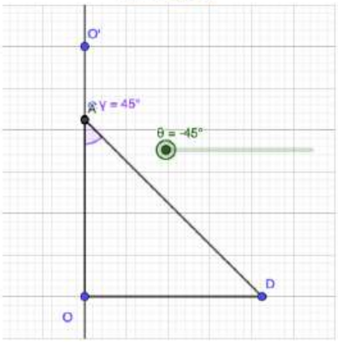



IMAGE 2

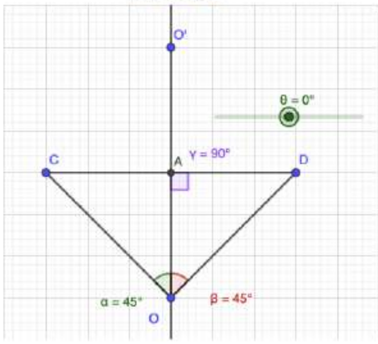
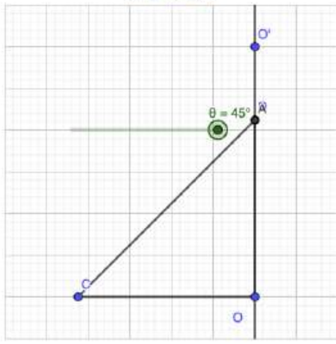



IMAGE 3




On s'intéresse à la rotation d'un segment $CD$ du carré qui a pour centre de rotation $O$. $A$ correspond au point d'intersection entre la droite qui lie les centres de rotation et le segment $CD$. $\alpha, \beta$ et $\gamma$ sont des angles qui nous aident à comprendre comment trouver l'intervalle. Nous avons défini l'intervalle comme étant $I$ : il correspond à l'intervalle sur lequel $A$ apparaît quand on tourne $CD$. Cet intervalle a une valeur initiale qu'on appelle $I_1$ et une valeur finale $I_2$, autrement dit $I = [\mathrm{I}_1 ; \mathrm{I}_2]$. Comme dit précédemment, il faut que le segment $CD$ soit perpendiculaire à la droite pour utiliser la trigonométrie. Ainsi, pour que notre rotation commence à 0°, il est nécéssaire que $\gamma = 90°$, comme le montre la deuxième image.

Si l'on suppose que le point $C$ coïncide avec la droite comme le montre la première image, alors l'angle nécessaire pour faire pivoter $CD$ autour du point $O$ jusqu'à ce que $D$ coïncide avec la droite $OO'$, comme le montre la dernière image, correspond à l'écart entre $I_1$ et $I_2$, ici égal à 90°, soit $\frac{\pi}{2} rad$.

Pourtant, notre point de départ est $\theta = 0°$. Or une rotation peut uniquement aller dans un sens. Si nous reprenons la deuxième image, il faudrait que l'on tourne vers la droite de $\theta = 45°$ si le point $D$ veut coïncider avec la droite $(OO')$, et donc de $\theta = 315°$ vers la droite pour que le point $C$ puisse à son tour coïncider avec la droite $(OO')$. Pour rendre plus facile la rotation, il faut que l'angle initial de notre intervalle soit négatif, c'est-à-dire que $I_1 \leq 0$ si l'on veut tourner dans une unique direction. Ainsi, $I_1 = -\alpha$ et $I_2 = \beta$, autrement dit, $I = \left[-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}\right]$.

Pour trouver les angles $\alpha$ et $\beta$, il faut utiliser la trigonométrie car les triangles $CAO$ et $DAO$ sont rectangles en $A$ :

On a :

$$tan(\theta) = \frac{côté\ opposé}{côté\ adjacant} \Leftrightarrow \theta = atan\left(\frac{côté\ opposé}{côté\ adjacant}\right)$$

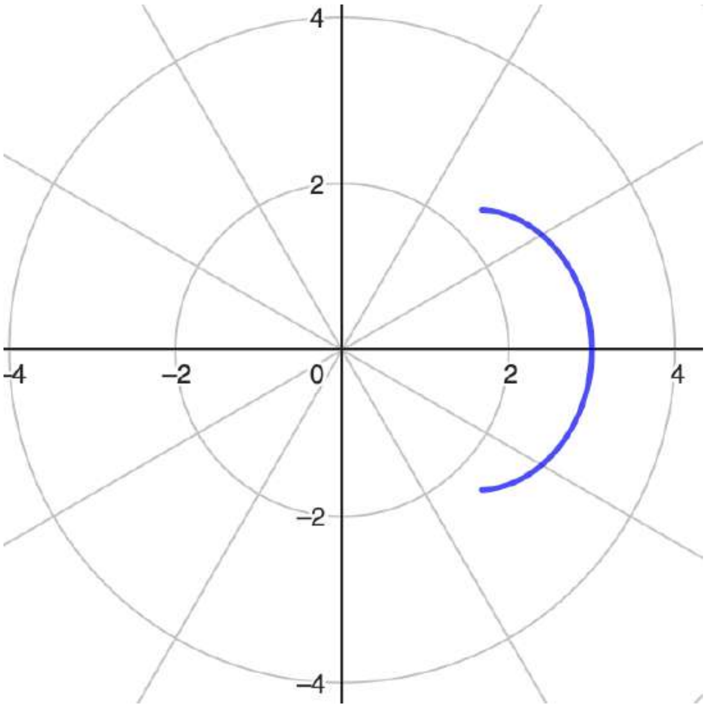
Donc pour ce carré :

$$\widehat{AOC} = atan\left(\frac{AC}{AO}\right) = atan\left(\frac{1,5}{1,5}\right) = \text{atan}(1) = 45° = \frac{\pi}{4}rad$$

$$\widehat{HOB} = atan\left(\frac{AD}{AO}\right) = atan\left(\frac{1,5}{1,5}\right) = \text{atan}(1) = 45° = \frac{\pi}{4}rad$$

Et comme dit précédemment, l'angle $\widehat{AOC}$ doit être négatif, et l'on retrouve bel et bien $I = [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$. Nous obtenons donc l'équation polaire suivante :

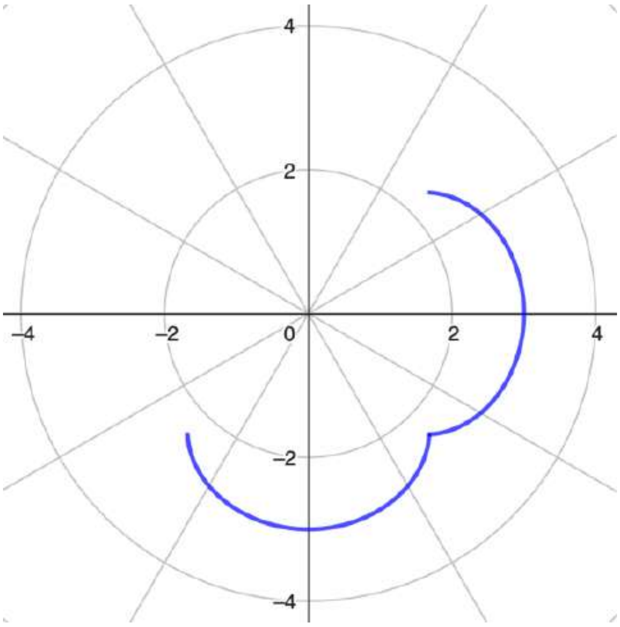
$$f(\theta) = 4,5 - \frac{\frac{3}{2}}{cos\theta} \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$$




Avec l'intervalle, nous venons d'obtenir la première foliole de ce carré. Il faut encore en dessiner 4 et les arranger bien pour obtenir la figure foliée $\tilde{F}$ de ce carré.

Le carré est un cas facile, puisqu'il nous est possible d'assembler 4 folioles à partir de 4 équations polaires sans avoir à faire de translations pour les assembler. La première chose à penser, c'est qu'on doit tourner de 90° la prochaine foliole, sinon elle resterait au même endroit que l'image précédente. On doit donc ajouter $\frac{\pi}{2}$ à $\theta$ dans notre équation polaire. La distance $OO'$ ne varie pas, elle reste égale à $4,5$, comme la distance $OA$, car le centre de rotation du carré est le centre du carré. En revanche, il va falloir modifier l'intervalle sur lequel est défini la foliole. L'écart entre les deux valeurs $I_1$ et $I_2$ va rester le même, il sera toujours de $\frac{\pi}{2}rad$. Il va falloir changer les valeurs $I_1$ et $I_2$ de l'intervalle. Pour maintenir la continuité et la symétrie des folioles sur le graphique polaire tout en s'assurant que les deux folioles se touchent (on rappelle que la figure foliée doit être continue), il faut soustraire $\frac{\pi}{2}$ à $I_1$ et $I_2$ de l'intervalle de la première foliole. Ainsi, nous obtenons la deuxième foliole avec l'équation polaire suivante :

$$f(\theta) = 4{,}5 - \frac{\frac{3}{2}}{\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} \in \left[-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right]$$



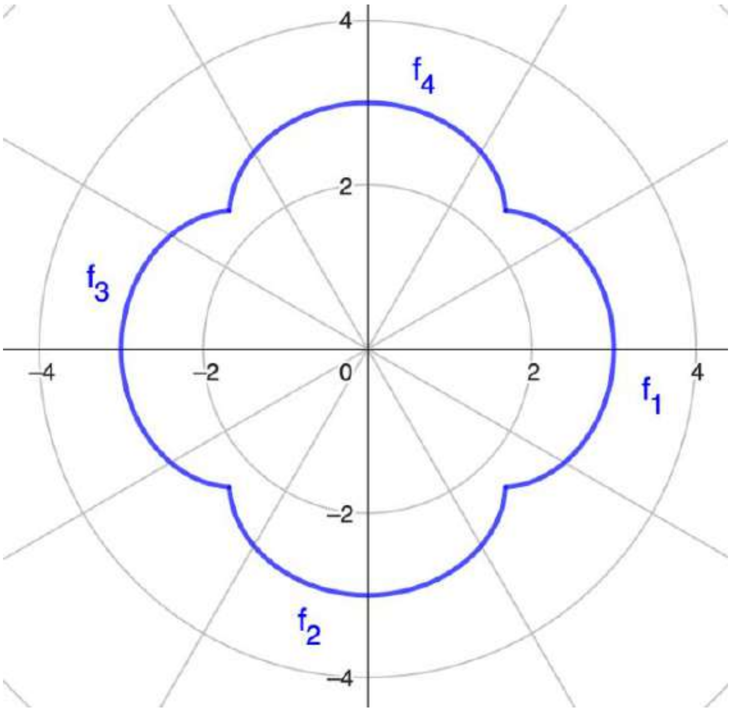

Pour cet exemple du carré, il nous suffit alors de répéter l'opération encore 2 fois, car un carré possède 4 segments, donc sa figure foliée possède 4 folioles. On obtient ainsi les 4 équations des folioles de ce carré :

$$f_1(\theta) = 4{,}5 - \frac{\frac{3}{2}}{cos\theta} \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$$

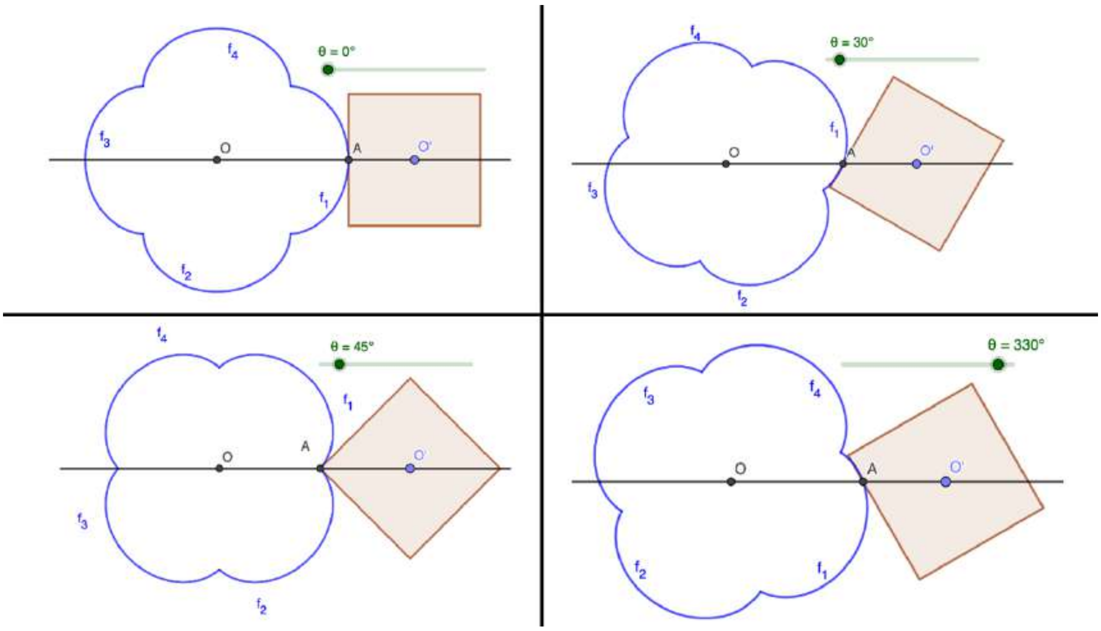
$$f_2(\theta) = 4{,}5 - \frac{\frac{3}{2}}{\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} \in \left[-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right]$$

$$f_3(\theta) = 4{,}5 - \frac{\frac{3}{2}}{\cos(\theta + \pi)} \in \left[-\frac{5\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}\right]$$

$$f_4(\theta) = 4{,}5 - \frac{\frac{3}{2}}{\cos\left(\theta + \frac{3\pi}{2}\right)} \in \left[-\frac{7\pi}{4}; -\frac{5}{4}\right]$$

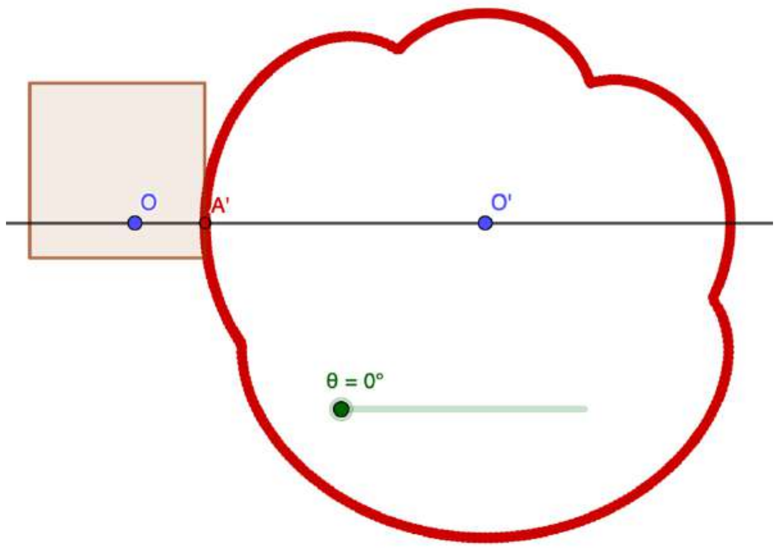



Nous venons de tracer graphiquement la figure foliée $\tilde{F}$ à partir d'un carré $F$ qui a des côtés de longueur $r = 3$ dont le centre de rotation est le centre du carré. Si l'on fait tourner cette figure foliée par rapport à son centre (dans l'image, l'origine du plan polaire) avec le carré $F$ par rapport à son centre, alors les deux figures, alors il existe toujours un point sur le contour du carré qui se confond avec un point sur le contour de la figure foliée à chaque instant, suivant continûment le mouvement des deux figures. Dans cet exemple, le point A touche à tout moment le contour des deux figures, et il est toujours sur la droite $OO'$ :



## 5. Tracé de figures foliées à partir d'un polygone avec un centre de rotation Décalé

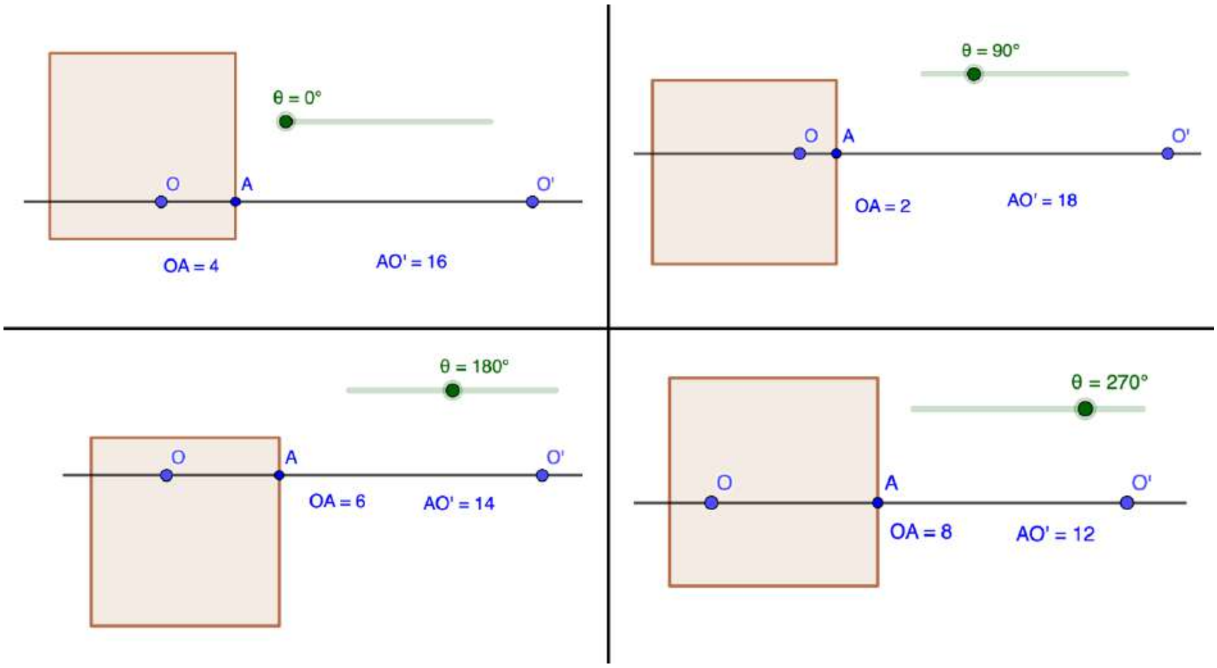
Nous nous étions intéressés au cas d'un carré qui tourne par rapport à son centre pour tracer la foliole de chaque côté du carré. Nous nous sommes alors demandé comment deviendrait la figure foliée d'un carré de longueur $r = 10$, mais qui a un centre de rotation $O$ qui n'est pas situé au centre du carré, et qui est séparé du deuxième centre de rotation $O'$ d'une distance $OO' = 20$. En employant la méthode pour tracer la figure foliée sous forme d'un ensemble de points dans la partie 3.1., nous obtenons la figure $\tilde{F}$ suivante :




Ici, les folioles sont différentes les unes des autres. 2 choses expliquent ce changement de taille :

- D'abord, il y a la distance $OA$ : À chaque fois qu'un segment du carré est perpendiculaire à la droite $OO'$, la distance fixe $OA$ change. Les équations polaires de chaque foliole vont donc changer de numérateur.
- Puis les valeurs de l'intervalle. Les valeurs $I_1$ et $I_2$ vont varier en fonction de la position du point $O'$, mais dans le cas du carré, elles auront toujours un écart de 90°.

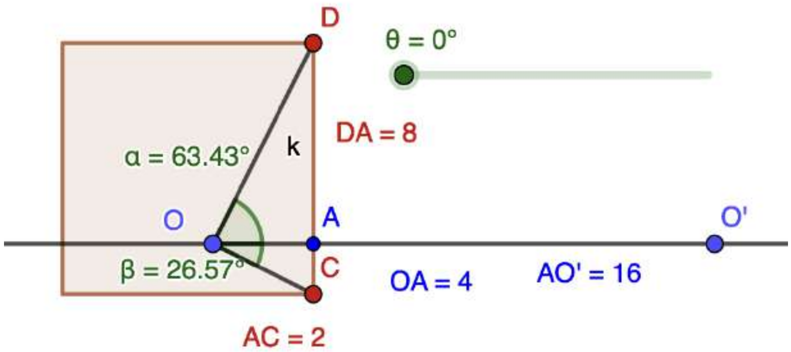
Il va alors falloir s'intéresser un par un aux 4 positions du carré où $OA$ est perpendiculaire à la droite $OO'$ :




Nous allons nous intéresser à la première position où $\theta = 0°$. D'après la formule, on a :

$$f(\theta) = 20 - \frac{4}{\cos\theta} \in [I_1; I_2]$$

On cherche les valeurs $I_1$ et $I_2$:

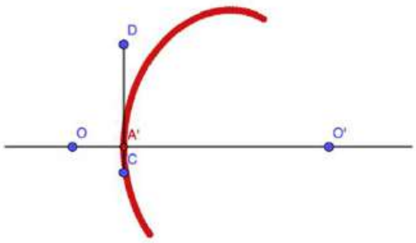



$$\widehat{DOA} = \text{atan}\left(\frac{DA}{OA}\right) = \text{atan}\left(\frac{8}{4}\right) = \text{atan}(2) \approx 63{,}43°$$

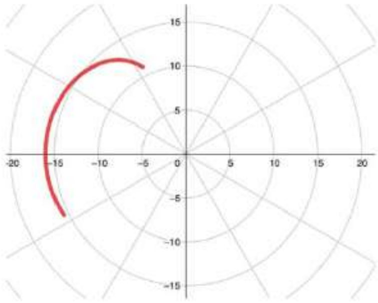
$$\widehat{COA} = \text{atan}\left(\frac{CA}{OA}\right) = \text{atan}\left(\frac{2}{4}\right) = \text{atan}\left(\frac{1}{2}\right) \approx 26{,}57°$$

Ainsi, on obtient l'intervalle sur lequel est défini la foliole de ce segment pour ce carré :

$$f(\theta) = 20 - \frac{4}{\cos\theta} \in \left[-\mathrm{atan}(2); \mathrm{atan}\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$




Ensemble de points



Équation polaire

On remarque que la foliole est exactement de la même forme que l'ensemble de points.

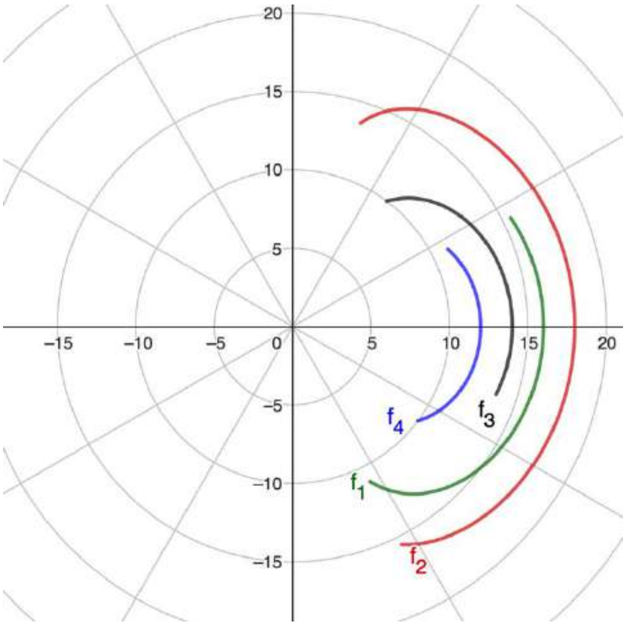
Il est alors nécessaire de répéter l'opération pour les 4 situations pour obtenir les 4 folioles de la figure foliée $\tilde{F}$. En répétant l'opération, on obtient les 4 équations polaires suivantes :

$$f_1(\theta) = 20 - \frac{4}{\cos\theta} \in \left[-\mathrm{atan}(2); \mathrm{atan}\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$

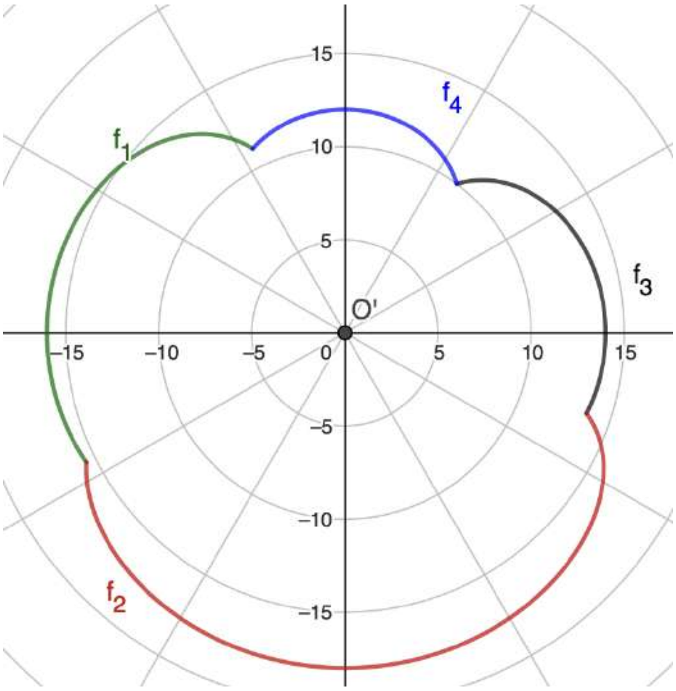
$$f_2(\theta) = 20 - \frac{2}{\cos\theta} \in [-\mathrm{atan}(2); \mathrm{atan}(3)]$$

$$f_3(\theta) = 20 - \frac{6}{\cos\theta} \in \left[-\mathrm{atan}\left(\frac{1}{3}\right); \mathrm{atan}\left(\frac{4}{3}\right)\right]$$

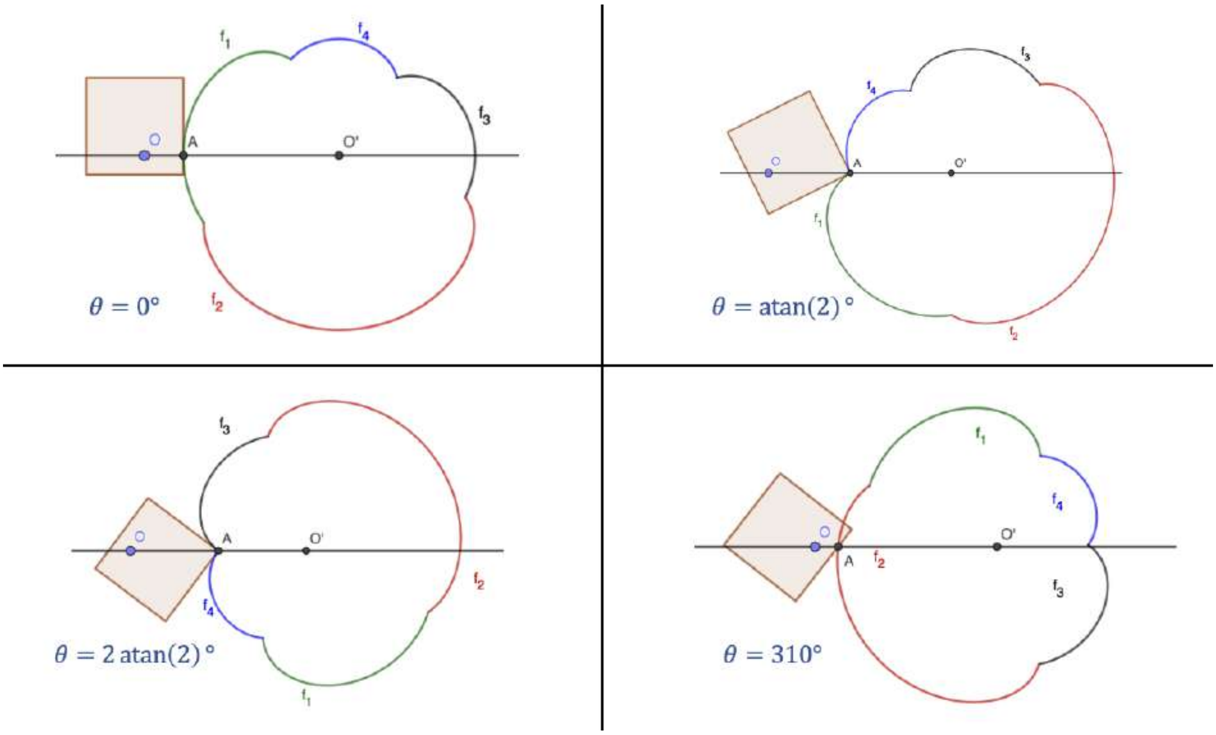
$$f_4(\theta) = 20 - \frac{8}{\cos\theta} \in \left[-\mathrm{atan}\left(\frac{3}{4}\right); \mathrm{atan}\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$




Nous obtenons toute ces folioles qu'il faut arranger pour obtenir la figure foliée comme l'ensemble de points que nous avons vu. Il est impossible de les arranger en ajoutant une valeur d'angle au cosinus de $\theta$ car certaines folioles sont plus grandes que d'autres et n'arrivent jamais à se toucher à partir d'une rotation par rapport au centre ; Il faut donc les assembler une par une, comme un puzzle, en les tournant de $90°$ pour passer d'une foliole à l'autre. On obtient alors cette figure foliée à partir de translations et de rotations :



On remarque que cette figure est exactement la même que celle formée par un ensemble de points. En la faisant tourner par rapport à son centre respectif $O'$ avec le carré auquel nous nous intéressions par rapport à son centre respectif $O$, il existe toujours un point sur le contour du carré qui se confond avec un point sur le contour de la figure foliée à chaque instant, suivant continûment le mouvement des deux figures. Ce point apparaît toujours sur la droite $OO'$ :




Nous avons fait cet exemple avec un carré, mais il est tout à fait possible de faire de même avec un autre polygone continu différent qu'un carré, même si son centre de rotation n'est pas son centre.

## 6. Vitesses de rotation différentes

Nous nous sommes finalement intéressés aux vitesses de rotation des figures $F$ et $\tilde{F}$.

Si un polygone continu $F$ tourne $\omega$ fois plus vite que la figure foliée $\tilde{F}$, alors pour chaque angle de rotation $\theta$ de $\tilde{F}$, l'angle de rotation du polygone sera de $\alpha \times \theta$ avec $\omega \in \mathbb{R}_+$. Il faut alors multiplier la variable $\theta$ par $\omega$ au cosinus de notre équation :

$$f(\theta) = OO' - \frac{OA}{\cos \omega\theta} \in I$$

Pour cela, nous allons nous intéresser à un carré de longueur $r = 3$ qui a pour centre de rotation son centre $O$ séparé d'une distance $OO' = 4{,}5$ du centre de rotation de la figure foliée $\tilde{F}$. Si l'on utilise notre formule, on a :

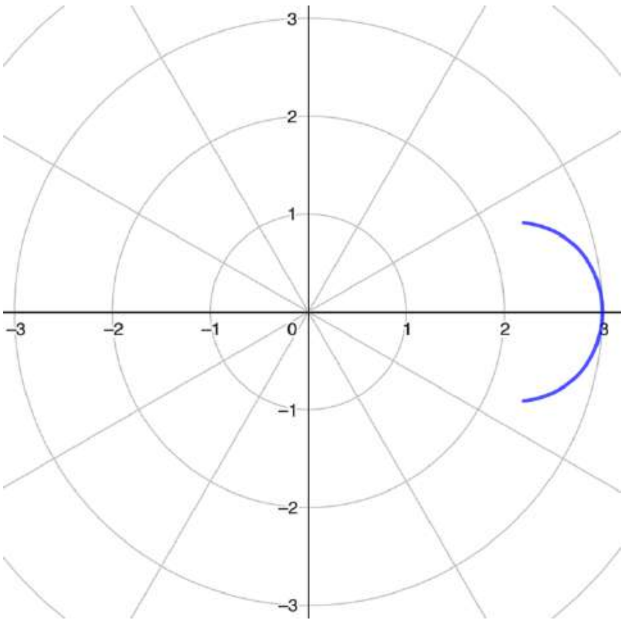
$$f(\theta) = 4{,}5 - \frac{\frac{3}{2}}{\cos(2\theta)} \in [I_1; I_2]$$

Comme pour la variable $\theta$, la vitesse de rotation influence également les valeurs de l'intervalle sur lequel est défini notre foliole. Comme la vitesse de rotation du carré $F$ a doublé et que nous avons insérer une variable multipliée par 2 dans notre fonction polaire, nous devons réduire par 2 deux l'intervalle sur lequel est défini la fonction polaire dans un carré qui tourne à la même vitesse que la figure foliée. Donc :

$$I = \left[-\frac{\frac{\pi}{4}}{2}; \frac{\frac{\pi}{4}}{2}\right] \Leftrightarrow I = \left[-\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8}\right]$$

On obtient ainsi l'équation de notre première foliole :

$$4{,}5 - \frac{\frac{3}{2}}{\cos(2\theta)} \in \left[-\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8}\right]$$




Contrairement aux autres folioles, celle-ci est devenue plus petite. Mais il est intéressant de noter que dans ce cas, notre figure foliée ne va pas contenir 4 folioles, mais 8 car si l'intervalle sur lequel est défini la foliole est réduit par 2, alors l'écart entre $I_1$ et $I_2$ l'est aussi. En revanche, notre carré tourne toujours de $90°$, donc la valeur à ajouter au cosinus ne change pas et reste $\frac{\pi}{2}$. Ainsi, la seconde équation de notre foliole est :

$$f_2(\theta) = 4{,}5 - \frac{\frac{3}{2}}{\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right)} \in \left[-\frac{3\pi}{8}; -\frac{\pi}{8}\right]$$

Il nous suffit de répéter l'opération 8 fois pour obtenir les 8 folioles, et donc la figure foliée $\tilde{F}$. Les équation polaires sont respectivement :

$$f_3(\theta) = 4{,}5 - \frac{\frac{3}{2}}{\cos(2\theta + \pi)} \in \left[-\frac{5\pi}{8}; -\frac{3\pi}{8}\right]$$

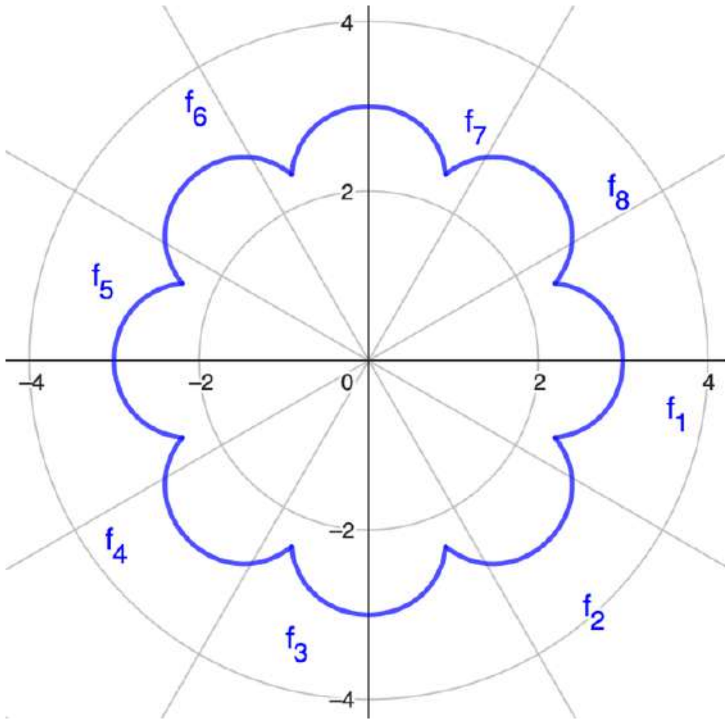
$$f_4(\theta) = 4{,}5 - \frac{\frac{3}{2}}{\cos\left(2\theta + \frac{3\pi}{2}\right)} \in \left[-\frac{7\pi}{8}; -\frac{5\pi}{8}\right]$$

$$f_5(\theta) = 4{,}5 - \frac{\frac{3}{2}}{\cos(2\theta + 2\pi)} \in \left[-\frac{9\pi}{8}; -\frac{7\pi}{8}\right]$$

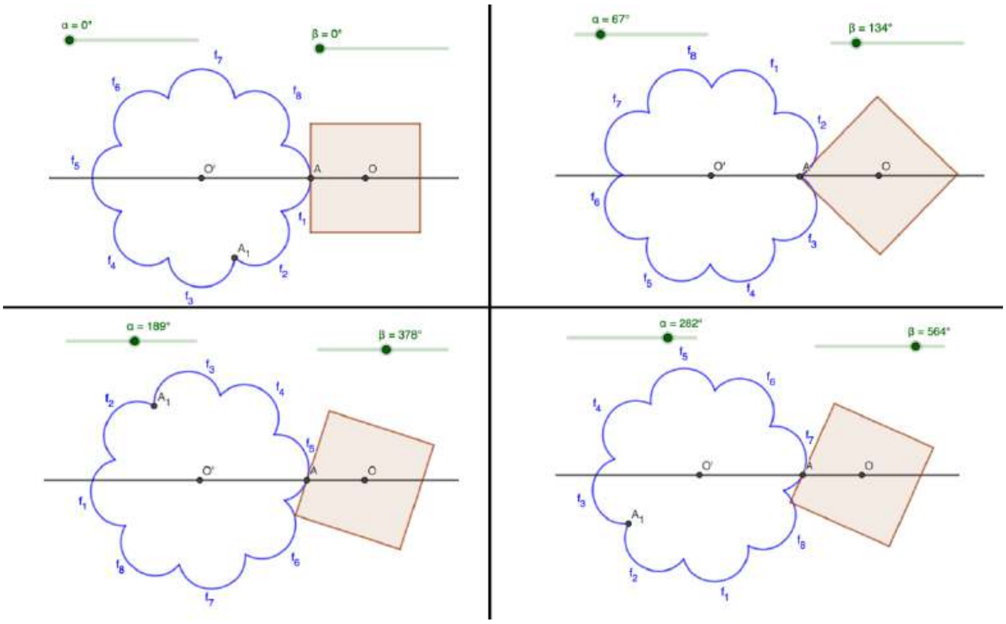
$$f_6(\theta) = 4{,}5 - \frac{3}{2} / \cos\left(2\theta + \frac{5\pi}{2}\right) \in \left[-\frac{11\pi}{8}; -\frac{9\pi}{8}\right]$$

$$f_7(\theta) = 4{,}5 - \frac{\frac{3}{2}}{\cos(2\theta + 3\pi)} \in \left[-\frac{13\pi}{8}; -\frac{11\pi}{8}\right]$$

$$f_8(\theta) = 4{,}5 - \frac{3}{2} / \cos\left(2\theta + \frac{7\pi}{2}\right) \in \left[-\frac{15\pi}{8}; -\frac{13\pi}{8}\right]$$



Maintenant, on a deux angles qui vont faire tourner les deux figures : l'angle $\alpha$ fait tourner la figure foliée $\tilde{F}$ deux fois moins vite que le carré $\tilde{F}$ qui tourne par rapport à l'angle $\beta$ :




Il existe donc toujours un point $A$ sur le contour du carré qui se confond avec un point sur le contour de la figure foliée $\tilde{F}$ à chaque instant, suivant continûment le mouvement des deux figures, même si elles tournent à des vitesses différentes. Ce point apparaît toujours sur la droite $OO'$.

## 7. Conclusion

Pour conclure, on peut dire qu'à partir d'un polygone $F$, il est possible de tracer sa figure foliée $\tilde{F}$ qui se construit par un ensemble de folioles que l'on peut tracer en utilisant l'équation polaire $f_n(\theta) = OO' - \frac{OH}{\cos(\omega\theta)} \in [I_1; I_2]$.

Une fois que l'on fait tourner les figures $F$ et $\tilde{F}$ autour de leurs centres respectifs, il existe toujours un point du contour de $F$ et de $\tilde{F}$ qui se confondent en suivant continûment le contour de $F$.