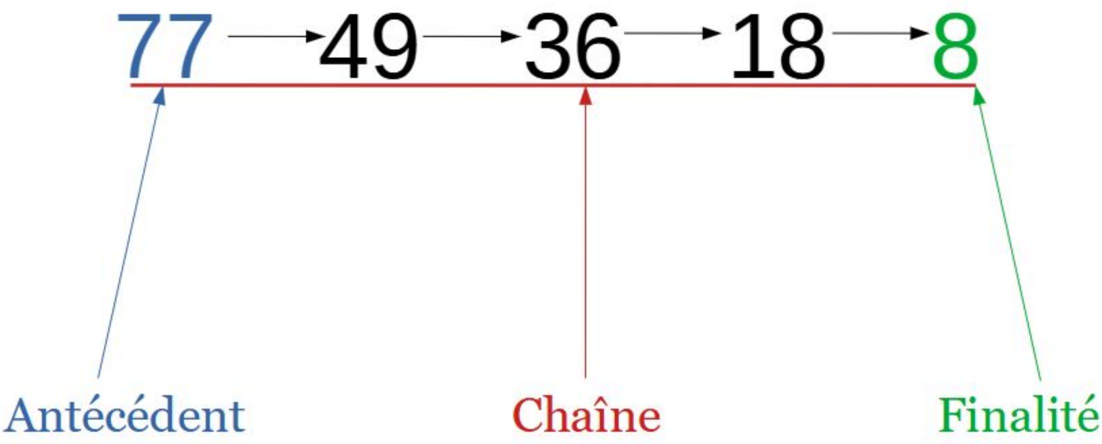
Produit de nombres

Prenons un nombre entre 10 et 99 (par exemple 77) et multiplions les deux chiffres qui le composent (7x7 = 49). Répétons cette étape jusqu'à n'obtenir qu'un seul chiffre.



Dans cet exemple, le nombre 77 mène au nombre 8 : on dit alors que 77 est un **antécédent** de 8, et, inversement, 8 est une **finalité** de 77. Enfin, la suite de nombre obtenue est appelée une **chaîne**.

Plus généralement, l'antécédent est le nombre de départ que l'on choisit pour ensuite multiplier les chiffres qui le composent jusqu'à trouver sa finalité. La finalité, elle, est le résultat final, celui qu'on ne peut plus multiplier.

Pour ce sujet, nous avons travaillé en 2 groupes distincts puis, pour écrire cet article, nous avons mis en commun nos multiples recherches afin que vous, lecteur(trice)s, puissiez bénéficier de nos nombreux résultats, en pouvant examiner nos différentes manières de les obtenir.

En examinant ce sujet, nous nous sommes posé beaucoup de questions telles que :

- Est-ce que le calcul de la finalité d'un nombre peut former un cycle ?
- Est-ce que chaque nombre possède une finalité/un antécédent ?
- **Est-ce que des nombres reviennent plus souvent comme finalité ?**
  - Peut-on avoir une idée de la finalité d'un nombre au premier coup d'œil ?
  - Pourquoi y a-t-il plus de possibilités de faire un nombre pair qu'un nombre impair en finalité ? => parité et probabilité

1 - Est-ce que le calcul de la finalité d'un nombre peut former un cycle ?

Un cycle serait une chaîne qui, au bout d'un moment, retombe sur le nombre de départ. La chaîne d'un nombre est forcément décroissante (résultat du théorème), on ne peut donc pas retomber sur un nombre précédemment utilisé.

Théorème : La suite des étapes est forcément décroissante.
Démonstration :

Le nombre de départ est 10 *x + y, avec y le chiffre des unités (entre 0 à 9) et x le chiffre des dizaines (entre 1 à 9). La* finalité est donc *x x y :*

10>y , par définition de y

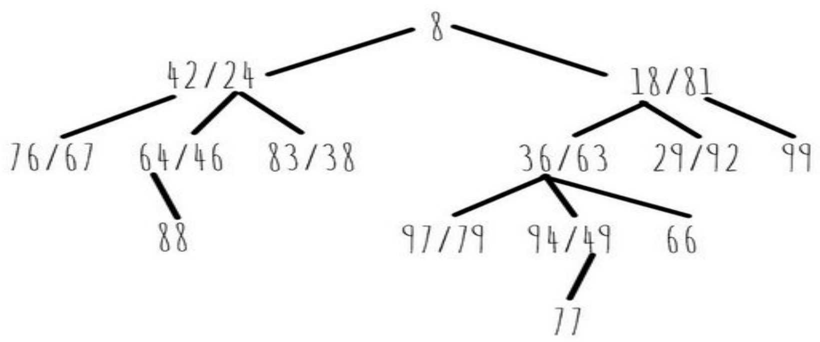
10 x x > x x y , car x est positif

10 x x + y > *x x y + y , car y est positif*

10 x x + y > x x y + y > x x y, le nombre de départ est bien plus grand que la finalité.

2- Est-ce que chaque nombre possède un antécédent et une finalité ?

Les chaînes sont forcément décroissantes. Elles finissent donc sur un nombre composé d'un seul chiffre qui est la finalité. De même pour les antécédents, pour démontrer cela nous avons créés des arbres :



Nous sommes partis de la finalité 8 et nous avons cherché toutes les possibilités de tomber sur 8 en multipliant deux chiffres, ainsi de suite jusqu'à tomber sur un nombre (88 et 77) qui n'est plus le résultat d'une multiplication de deux nombres compris entre 1 et 9

3- Est-ce que des nombres reviennent plus souvent comme finalité ?

- Peut-on avoir une idée de la finalité d'un nombre au premier coup d'œil ?

Nous avons essayer de déterminer un moyen de prédire la finalité sans avoir calculé toutes les étapes. Voici nos résultats :

- Avec un 0 dans l'unité, la finalité est 0.

50 —> 0   10 —> 0

- Avec un 1 en dizaine ou en unité, la finalité est égale à l'autre chiffre.

61 —> 6   19 —> 9

- Avec un 2 en dizaine ou en unité, pour la finalité on prend le chiffre des unités du produit des deux chiffres.

27 —> 2x7 —> 14 donc 4

- Avec un 5, si l'autre chiffre est 5 ou 9 ou est pair, alors la finalité est 0, sinon la finalité est 5.

45 —> 0   59 —> 0   25 —> 0   53 —> 5

  - Pourquoi y a-t-il plus de possibilités de faire un nombre pair qu'un nombre impair ?

Nous avons utilisé deux méthodes. L'une de ces méthodes est l'étude de la parité des nombres avec une démonstration.

Propriété : Le produit de deux nombres pairs est pair.
Démonstration :
Si l'unité et la dizaine sont paires : y= 0,2,4,6,8 *x*= 0,2,4,6,8 :
Alors : $y=2p$, avec p entre 0 et 4
$x=2q$, avec q entre 0 et 4
L'étape x $\times$ y peut se réécrire $x \times y = 2q \times 2p = 2(2q \times p)$
L'étape est donc paire.

Propriété : Le produits de deux nombres impairs est impair.
Démonstration :
Si l'unité et la dizaine sont impaires : y= 1,3,5,7,9 *x*= 1,3,5,7,9 :
Alors : $y=2p+1$, avec p entre 0 et 4
$x=2q+1$, avec q entre 0 et 4
L'étape x $\times$ y peut se réécrire $x \times y = (2q+1)\times(2p+1)$
$= 2q(2p+1)+1x\,(2p+1)$
$= 2qx2p+2qx1 +2p+1$
$= 2 \text{ x } (\, qx2p+q+p)+1$
Donc l'étape est donc impaire.

Propriété : Le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est pair.
Démonstration :
Si l'unité (ou la dizaine) est paire : $x =$ 0, 2, 4, 6, 8 et l'autre est impaire :
Alors : $y=2p+1$, avec p entre 0 et 4
$x=2q$, avec q entre 0 et 4
L'étape x $\times$ y peut se réécrire $x \times y = 2q \times (2p+1)$
$= 2x(q(2p+1))$
L'étape est donc paire.

  - Pourquoi y a-t-il plus de possibilités de faire un nombre pair qu'un nombre impair en finalité ?

Il y a 5 chiffres pairs et 5 chiffres impairs soit :

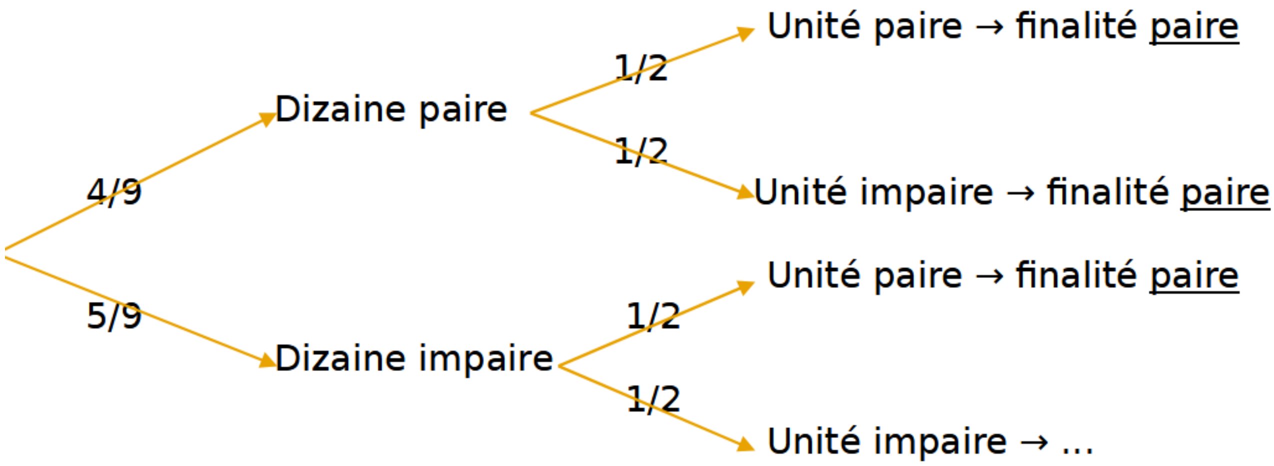
- 4 chances sur 9 d'avoir un nombre pair dans les dizaines (pas de 0).
- 1 chances sur 2 d'avoir un nombre pair pour les unités.

La probabilité d'avoir un nombre ayant 2 chiffres pairs est 4/9 x 1/2 = 4/18 = 2/9.

La probabilité d’avoir un nombre ayant au moins 1 chiffre impair est 1-2/9 = 7/9.

Il y a 13/18 de chance d’avoir un chiffre pair dans le nombre, menant forcément à une finalité paire.

Il y a 14/18 de chance d’avoir un chiffre impair dans le nombre (et 5/18 d’avoir 2 chiffres impairs, menant à une étape impaire)



Une autre méthode un peu plus simple et peut-être un peu plus intuitive pour trouver les chances de tomber sur un nombre pair ou impair est de faire un calcul de probabilité.

Comme vous pouvez le voir, les résultats parlent d’eux même :

$$\text{Probabilité calcul} = \frac{\text{Nombres de cas favorables (possibilités)}}{\text{Nombres de chances en tout}}$$

$$\text{Nombres de chances en tout} \longrightarrow 90$$

1~0,0111…	4~0,1	7~0,022
2~0,0888…	5~0,0666…	8~0,2444…
3~0,0222…	6~0,1444…	9~0,0333…
		0~0,2666…

~0,9994~1