Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

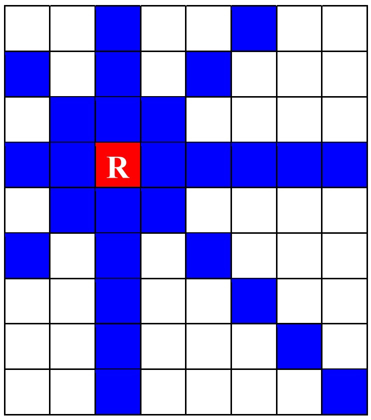
Problème des reines

Année 2017-2018

Auteur·e·s : Louise LIZÉ, Charlie MALFAIT, Loréna NOËL, Laura ORVAIN, Camille POËTTE (terminale S).
Établissement : Lycée Condorcet, Saint-Quentin (02).
Encadré·e·s par : Fabien AOUSTIN.
Chercheur : Fabien DURAND, Laboratoire Amiénois de Mathématique Fondamentale et Appliquée, LAMFA, UMR CNRS 7352, Université de Picardie Jules Verne.

1) Présentation du problème :

Le but est de placer des reines sur un échiquier de dimension $n \times n$, sans qu'elles soient en prise.



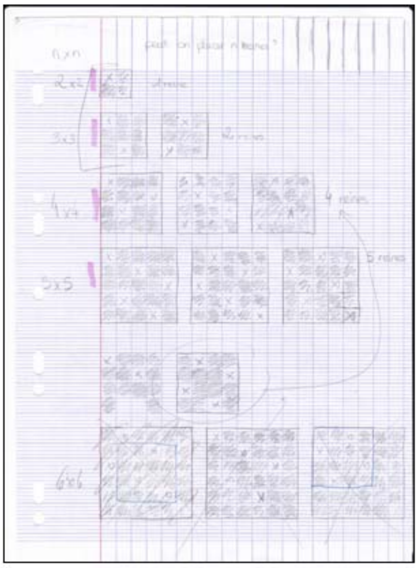
Les reines peuvent se déplacer horizontalement, verticalement ou en diagonale.
Sur un échiquier de dimension $n \times n$, on ne peut pas placer plus de n reines car sinon, il y aura au moins une colonne qui contient deux reines.

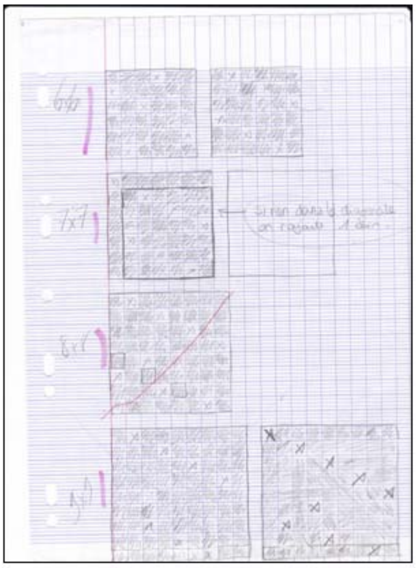
Nous nous sommes posé deux questions :

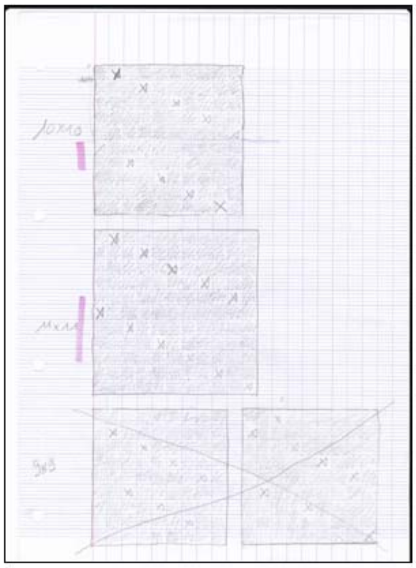
- Est-il toujours possible de positionner n reines sur un échiquier $n \times n$, sans qu'elles soient en prise ?
- Si cela est possible, combien existe-t-il de solutions ?

2) Premières recherches :

Nous nous sommes vite rendu compte de la complexité de la tâche, ce qui est dû au nombre assez conséquent de configurations à envisager.
Voici quelques brouillons qui peuvent en témoigner.

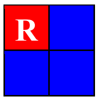






2-a) Cas 2 × 2 :

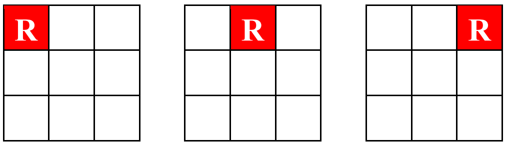
Dès qu’on place une reine sur un échiquier 2 × 2, toutes les cases sont atteignables.



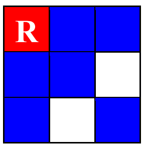
Il y a 4 possibilités de départ, mais on remarque que pour chacune, il ne reste plus de place pour une deuxième reine.
Il n’y a donc pas de solution pour n = 2.

2-b) Cas 3 × 3 :

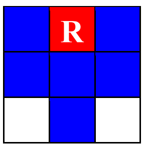
Pour placer une reine sur la première ligne, il y a trois cas possibles.
Les premier et troisième cas sont identiques par symétrie.



Dans le premier cas, il reste deux cases pour placer les deux autres reines mais elles sont en prise.



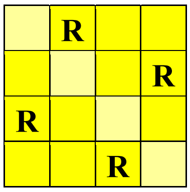
Dans le deuxième cas, il reste deux cases pour placer les deux autres reines mais elles sont en prise.



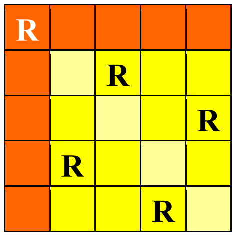
Il n’y a donc pas de solution pour n = 3.

2-c) D'une solution à l'autre :

Nous avons remarqué que lorsque nous avons une solution pour *n* sans reine dans une diagonale, nous avons juste à rajouter une reine dans un coin afin d'obtenir une solution pour *n* + 1.

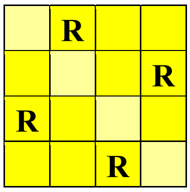


→



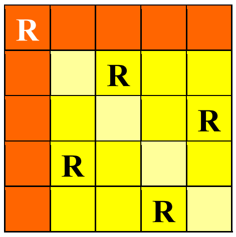
2-d) Une méthode générale :

Nous avons obtenu plusieurs solutions « régulières » en disposant les reines de la façon suivante : on positionne une reine sur la deuxième case de la première ligne puis on dispose les suivantes en suivant la marche du cavalier (deux cases à droite, une case en bas). On recommence ainsi pour la moitié inférieure de l'échiquier.

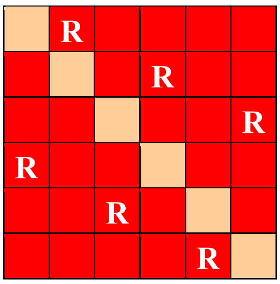


$n = 4$

→

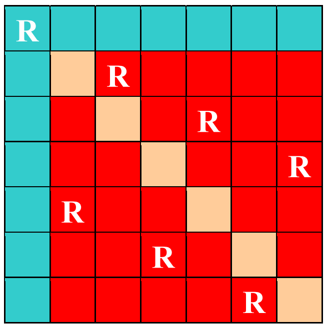


$n = 5$

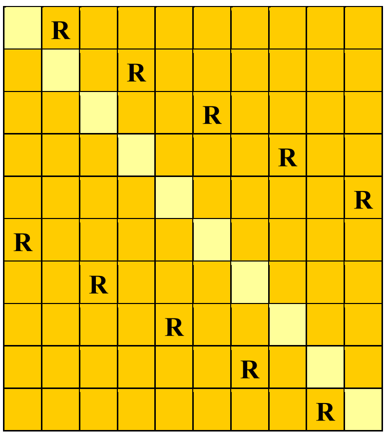


$n = 6$

→

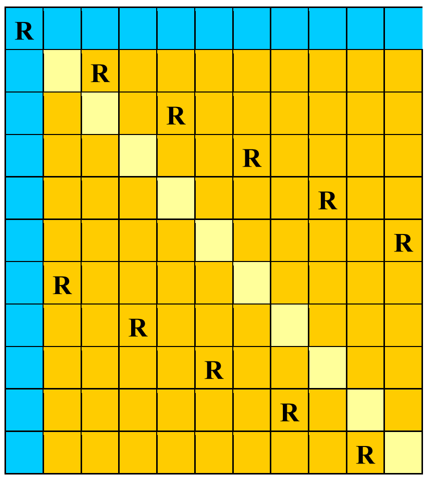


$n = 7$

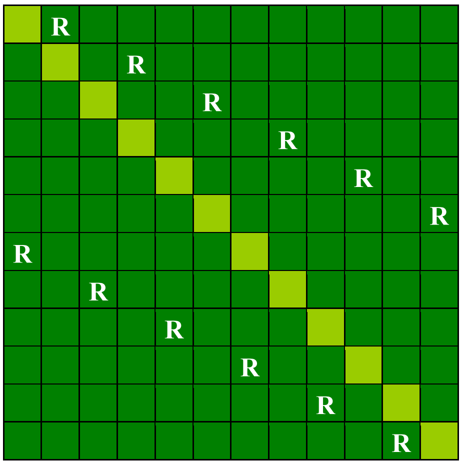


$n = 10$

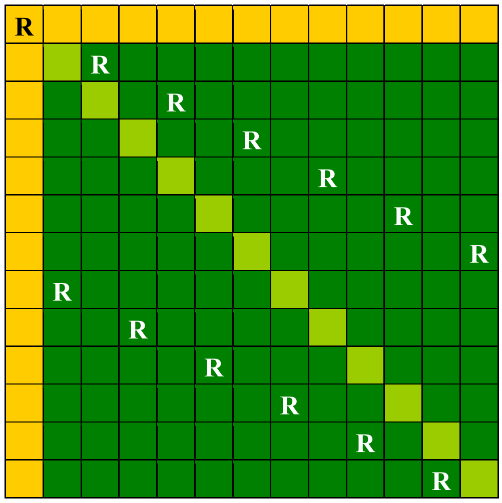
→



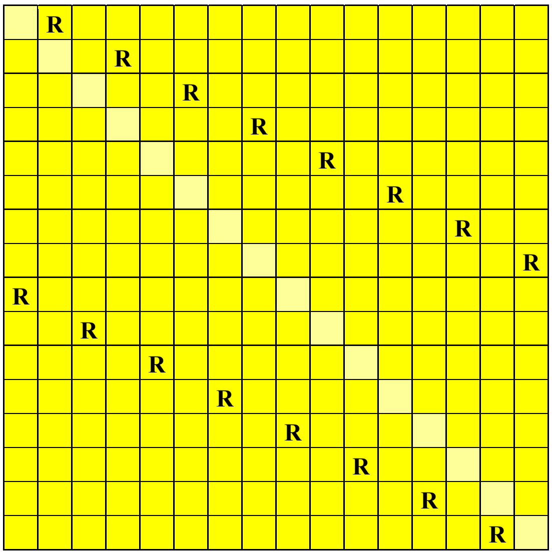
$n = 11$



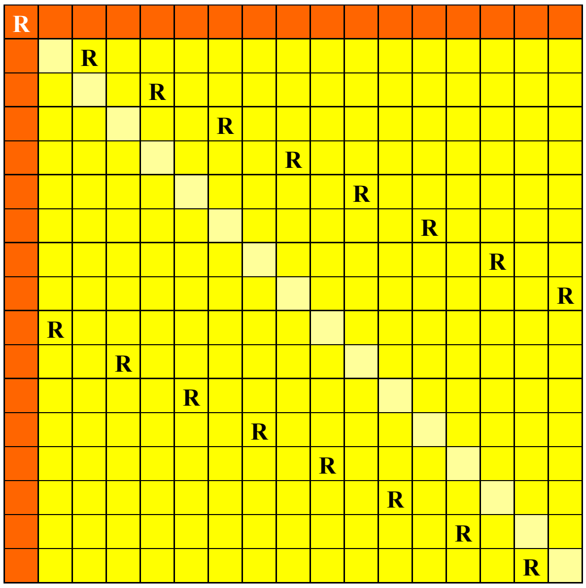
→



$n = 12$ $n = 13$

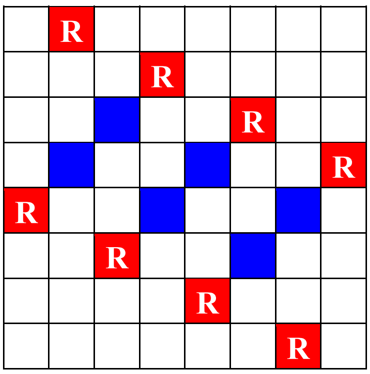


$n = 16$



$n = 17$

Nous avons constaté que cette technique marche pour quasiment tout entier n, sauf pour 8, 14, 20, 26, 32, etc. c'est-à-dire les entiers de la forme $8 + 6k$ (où k est en entier naturel).



Plus tard, nous avons trouvé une solution « régulière » pour $n = 8$ mais nous n'avons pas réussi à la généraliser tout de suite.

				R			
		R					
R							
						R	
	R						
							R
					R		
			R				

3) Recherche de toutes les solutions :

3-a) Représentation par une liste :

Dans la suite, on numérote les lignes et les colonnes de l'échiquier de 0 jusqu'à $n - 1$.
Comme on sait qu'il y a une seule reine par ligne et par colonne, on représente une configuration de reines par une liste de n entiers dans laquelle on trouve tous les entiers de 0 jusqu'à $n - 1$. Chaque entier représente le numéro de la ligne dans laquelle se trouve une reine.
Voici deux exemples :

	0	1	2	3
0	R			
1			R	
2		R		
3				R

	0	1	2	3
0		R		
1				R
2	R			
3			R	

La première situation correspond à la liste [0 ; 2 ; 1 ; 3] et la deuxième à la liste [2 ; 0 ; 3 ; 1].

3-b) Un premier algorithme :

Nous avons ensuite créé un algorithme pour vérifier si une liste donnée correspond à une configuration correcte ou non.
On sait déjà qu'il y a une seule reine par ligne et par colonne.
Il reste donc à vérifier que les reines ne sont pas sur une même diagonale.

Nous avons remarqué que si on ajoute l'abscisse et l'ordonnée de chaque case, on voit que chaque diagonale est repérée par à une valeur.
Pour les autres diagonales, on soustrait l'abscisse de l'ordonnée de chaque case.

	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	5
2	2	3	4	5	6
3	3	4	5	6	7
4	4	5	6	7	8

	0	1	2	3	4
0	0	–1	–2	–3	–4
1	1	0	–1	–2	–3
2	2	1	0	–1	–2
3	3	2	1	0	–1
4	4	3	2	1	0

Exemple 1 :

On considère la liste de configuration : $L_{config} = [0 ; 2 ; 1 ; 3]$.

Pour les premières diagonales on calcule les sommes :

$$L_{diag1} = [0 + 0 ; 2 + 1 ; 1 + 2 ; 3 + 3]$$
$$= [0 ; 3 ; 3 ; 6]$$

Pour les deuxièmes diagonales on calcule les différences :

$$L_{diag2} = [0 - 0 ; 2 - 1 ; 1 - 2 ; 3 - 3]$$
$$= [0 ; 1 ; -1 ; 0]$$

On trouve des valeurs identiques dans L_{diag1} (et dans L_{diag2} aussi) donc la liste de configuration L_{config} n'est pas valide.

Effectivement, si $L_{config} = [0 ; 2 ; 1 ; 3]$, on a la situation suivante :

R			
		R	
	R		
			R

Exemple 2 :

On considère la liste de configuration : $L_{config} = [2 ; 0 ; 3 ; 1]$.

Pour les premières diagonales on calcule les sommes :

$$L_{diag1} = [2 + 0 ; 0 + 1 ; 3 + 2 ; 1 + 3]$$
$$= [2 ; 1 ; 5 ; 4]$$

Pour les deuxièmes diagonales on calcule les différences :

$$L_{diag2} = [2 - 0 ; 0 - 1 ; 3 - 2 ; 1 - 3]$$
$$= [2 ; -1 ; 1 ; -2]$$

Toutes les valeurs de L_{diag1} et toutes les valeurs de L_{diag2} sont différentes donc la liste de configuration L_{config} est valide !

Effectivement, si L_{config} = = [2 ; 0 ; 3 ; 1], on a la situation suivante :

	R		
			R
R			
		R	

Il reste à savoir comment repérer que L_{diag1} ou que L_{diag2} contient deux éléments égaux.

Imaginons que $L_{diag1} = [12 ; 8 ; 5 ; 1 ; 8 ; 2 ; 0]$.

Étape 1 :

On trie la liste par ordre croissant. Ici, on obtient : [0 ; 1 ; 2 ; 5 ; 8 ; 8 ; 12].

Étape 2 :

On calcule les différences des termes. Ici, on a :

$$L_{diff} = [1 - 0 ; 2 - 1 ; 5 - 2 ; 8 - 5 ; 8 - 8 ; 12 - 8]$$
$$[1 ; 1 ; 3 ; 3 ; 0 ; 4].$$

Étape 3 :

Si une des différences est égale à 0, c'est que deux termes étaient égaux dans L_{diag1}.

Étape 4 :

Pour savoir si une des différences vaut 0, on calcule le produit des termes.

En effet, ce produit est nul si, et seulement si, un de ses facteurs est égal à 0.

Dans notre exemple, on a : $1 \times 1 \times 3 \times 3 \times 0 \times 4 = 0$.

Voici notre algorithme (réalisé avec le logiciel XCas) qui permet de savoir si une liste L est valide ou non. (1)

Prog Edit Ajouter 19 nxt Fonction Test Boucle OK Save

```
VRAIOUFAUX(L):={
  local k, D1, liste_des_différences, D2, liste_des_différences2 ;
  D1:=seq(L[k]+k,k,0,length(L)-1);
  D1:=trier(D1);
  liste_des_différences:=seq(D1[k+1]-D1[k],k,0,length(D1)-2);
  si product(liste_des_différences)==0 alors
     retourne(faux);
  fsi;
  D2:=seq(L[k]-k,k,0,length(L)-1);
  D2:=trier(D2);
  liste_des_différences2:=seq(D2[k+1]-D2[k],k,0,length(D2)-2);
  si product(liste_des_différences2)==0 alors
     retourne(faux);
  sinon
     retourne(vrai);
  fsi;
}:;
```

3-c) Un deuxième algorithme :

Le logiciel XCas permet de tester toutes les permutations de la liste [0 ; 1 ; 2 ; 3 ; … ; *n* – 1] jusqu'à la liste [*n* – 1 ; … ; 3 ; 2 ; 1 ; 0]

Par exemple, pour *n* = 4, on va tester les listes :

[0, 1, 2, 3]	[1, 0, 2, 3]	[2, 0, 1, 3]	[3, 0, 1, 2]
[0, 1, 3, 2]	[1, 0, 3, 2]	[2, 0, 3, 1]	[3, 0, 2, 1]
[0, 2, 1, 3]	[1, 2, 0, 3]	[2, 1, 0, 3]	[3, 1, 0, 2]
[0, 2, 3, 1]	[1, 2, 3, 0]	[2, 1, 3, 0]	[3, 1, 2, 0]
[0, 3, 1, 2]	[1, 3, 0, 2]	[2, 3, 0, 1]	[3, 2, 0, 1]
[0, 3, 2, 1]	[1, 3, 2, 0]	[2, 3, 1, 0]	[3, 2, 1, 0]

Voici notre deuxième algorithme qui affiche toutes les listes correctes et renvoie le nombre de solutions au problème des reines pour un entier N donné.

```
SOLUTIONS(N):={
  local k, DEBUT, compteur, FIN;
  DEBUT:=seq(k,k,0,N-1);
  compteur:=0;
  FIN:=seq(N-1-k,k,0,N-1);
  tantque DEBUT!=FIN faire
     si VRAIOUFAUX(DEBUT) alors
        afficher(DEBUT);
        compteur:=compteur+1 ;
     fsi;
     DEBUT:=nextperm(DEBUT)
  ftantque;
  retourne(compteur);
 }:;
```

Nous avons obtenu les résultats suivants :

n	nombre de solutions	temps d'exécution
4	2	< 1 s
5	10	< 1 s
6	4	< 1 s
7	40	< 1 s
8	92	≈ 10 s
9	352	≈ 2 min
10	724	≈ 20 min
11	2680	≈ 3 h

Hélas, les calculs deviennent trop longs à partir de $n = 12$.
Nous donnons en annexe les 92 solutions pour l'échiquier classique de côté 8. (annexe)

4) Démonstration pour la disposition proposée :

Nous allons démontrer que la disposition décrite au paragraphe 2-d est bien valide sauf dans le cas où la longueur du côté de l'échiquier est de la forme $6k + 2$ avec k un entier.

On considère un échiquier de taille $n \times n$ où n est pair.
La méthode consiste à positionner les reines ainsi :

- pour $x = 0$ jusqu'à $n/2 - 1$, on pose la reine en $(x\,;\,2x + 1)$
- pour $x = n/2$ jusqu'à $n - 1$, on pose la reine en $(x\,;\,2x - n)$.

Le premier cas donne des reines de type 1 et le deuxième cas des reines de type 2.
Voici un exemple avec $n = 8$.

	0	1	2	3	4	5	6	7
0		X						
1				X				
2						X		
3								X
4	X							
5			X					
6					X			
7							X	

On choisit deux reines R_1 et R_2.
Il y a trois cas à étudier :

- les deux reines sont de type 1
- les deux reines sont de type 2
- une reine est de type 1 et l'autre de type 2.

Dans chaque cas, il faut voir si les reines sont sur une même diagonale ou non.
Comme dans l'algorithme (paragraphe 3-b), on peut calculer cela en additionnant les coordonnées des reines pour les diagonales « plus » ou les soustraire pour les diagonales « moins ».

Si les deux reines sont de type 1 on a : $R_1 = (x ; 2x + 1)$ et $R_2 = (y ; 2y + 1)$.
Pour les sommes on a alors : $x + 2x + 1 = y + 2y + 1$.
On a donc $3x = 3y$ et $x = y$.
Ceci signifie que si les deux reines sont sur une même diagonale « plus » alors ce sont en fait les mêmes.
Pour les différences, on a : $x - (2x + 1) = y - (2y + 1)$.
On a donc $-x - 1 = -y - 1$ et $x = y$.
Ceci signifie que si les deux reines sont sur une même diagonale « moins » alors ce sont en fait les mêmes.
Finalement, deux reines de type 1 ne sont jamais sur la même diagonale.

Si les deux reines sont de type 2, on a : $R_1 = (x ; 2x - n)$ et $R_2 = (y ; 2y - n)$.
Pour les sommes on a alors : $x + 2x - n = y + 2y - n$.
On a donc $3x = 3y$ et $x = y$.
Ceci signifie que si les deux reines sont sur une même diagonale « plus » alors ce sont en fait les mêmes.
Pour les différences, on a : $x - (2x - n) = y - (2y - n)$.
On a donc $-x + n = -y + n$ et $x = y$.
La conclusion est encore la même.
Finalement, deux reines de type 2 ne sont jamais sur la même diagonale.

Supposons maintenant que $R_1 = (x ; 2x + 1)$ et $R_2 = (y ; 2y - n)$.
Pour les différences on a : $x - (2x + 1) = y - (2y - n)$.
On a donc : $-x - 1 = -y + n$.
Or $-x - 1 < 0$ et $-y + n > 0$ donc cette situation est impossible.
Deux reines de type différent ne sont jamais sur une même diagonale « moins ».

Pour les sommes on a : $x + 2x + 1 = y + 2y - n$.
On a donc : $3x + 1 = 3y - n$.

Nous allons distinguer les cas où n est de la forme $6k$, $6k + 2$ ou $6k + 4$.

Si n est de la forme $6k$, alors on a : $3x + 1 = 3y - 6k$.
On a donc $3x - 3y + 6k = -1$ ce qui est impossible car le membre de gauche est un multiple de 3 mais pas celui de droite.

Si n est de la forme $6k + 4$, alors on a : $3x + 1 = 3y - (6k + 4)$.
On a donc : $3x + 1 - 3y + 6k = -4$ et donc $3y - 3y + 6k = -5$ ce qui est impossible car le membre de gauche est un multiple de 3 mais pas celui de droite.

Il ne reste plus que le cas où n est de la forme $6k + 2$.
Si on choisit $x = k$ et $y = n/2$, on a alors : $R_1 = (k ; 2k + 1)$ et $R_2 = (n/2 ; 2n/2 - n) = (n/2 ; 0)$.
La somme pour R_1 vaut alors : $3k + 1$.
Celle pour R_2 vaut : $n/2 = (6k + 2)/2 = 3k + 1$.
Les reines R1 et R2 sont dans ce cas sur une même diagonale « plus ».

Par ailleurs, on peut vérifier qu'il n'y a jamais de reines dans la grande diagonale « moins ». Il suffit pour cela de regarder si les deux coordonnées d'une reine sont égales.
Si la reine est de type 1, on a $x = 2x + 1$ ce qui donne $x = -1$.
Si la reine est de type 2, on a $x = 2x - n$ ce qui donne $x = n$.
Comme x varie de 0 à $n - 1$, aucun de ces deux cas ne se réalise.

Finalement, la disposition décrite est bien valide dans tous les cas, sauf si $n = 6k + 2$.

5) Une proposition pour le cas manquant :

Il reste à traiter le cas des échiquiers de côté $2n$ avec $2n = 6k + 2$.
Nous avons finalement trouvé la disposition suivante qui semble fonctionner.
Sur la première ligne, on place la reine en $(0 ; n)$.
On place la seconde en descendant d'un carreau et en décalant de deux carreaux sur la gauche. On place ainsi les reines suivantes de la même manière jusqu'à ce qu'on ne puisse plus en placer.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0								X						
1						X								
2				X										
3		X												
4														
5														
6														
7														
8														
9														
10														
11														
12														
13														

On place ensuite une reine en $(n - 1 ; n + 2)$ puis la suivante en montant d'un carreau et en décalant de deux carreaux sur la droite. On place ainsi les reines suivantes tant que cela est possible.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0								X						
1						X								
2				X										
3		X												
4														X
5												X		
6										X				
7														
8														
9														
10														
11														
12														
13														

On reproduit la même figure par symétrie centrale pour la partie inférieure.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0								X						
1						X								
2				X										
3		X												
4														X
5												X		
6										X				
7					X									
8			X											
9	X													
10													X	
11											X			
12									X					
13							X							

Voici les résultats ainsi obtenus pour des échiquiers de côté 8, 20 et 24.

	0	1	2	3	4	5	6	7
0					X			
1			X					
2	X							
3							X	
4		X						
5								X
6						X		
7				X				

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0											X									
1									X											
2							X													
3					X															
4			X																	
5	X																			
6																			X	
7																	X			
8															X					
9													X							
10								X												
11						X														
12				X																
13		X																		
14																				X
15																		X		
16																X				
17														X						
18												X								
19										X										

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
0													X											
1											X													
2									X															
3							X																	
4					X																			
5			X																					
6	X																							
7																							X	
8																					X			
9																			X					
10																	X							
11															X									
12										X														
13								X																
14						X																		
15				X																				
16		X																						
17																								X
18																						X		
19																				X				
20																		X						
21																X								
22														X										
23												X												

6) Pour la suite... :

Il nous faudrait maintenant démontrer que la disposition décrite au paragraphe précédent est bonne.
Nous pourrions aussi essayer de trouver un algorithme de calcul plus rapide afin d'obtenir plus de résultats.
Enfin, nous aurions aimé trouver une formule qui donne directement le nombre de solutions pour un échiquier de taille $n \times n$.

Note d'édition

(1) Définition : Une liste de n entiers de 0 à $n-1$ est dite **valide** si elle permet d'obtenir sur l'échiquier une configuration de n reines qui ne sont pas en prise.

Annexe

(annexe)

Solutions du problème des reines pour *n* = 8.

X							
						X	
				X			
							X
	X						
			X				
					X		
		X					

[0,4,7,5,2,6,1,3]

X							
						X	
			X				
					X		
							X
	X						
				X			
		X					

[0,5,7,2,6,3,1,4]

X							
					X		
							X
		X					
						X	
			X				
	X						
				X			

[0,6,3,5,7,1,4,2]

X							
				X			
							X
					X		
		X					
						X	
	X						
			X				

[0,6,4,7,1,3,5,2]

					X		
X							
				X			
	X						
							X
		X					
						X	
			X				

[1,3,5,7,2,0,6,4]

			X				
X							
				X			
							X
	X						
						X	
		X					
					X		

[1,4,6,0,2,7,5,3]

				X			
X							
							X
			X				
	X						
						X	
		X					
					X		

[1,4,6,3,0,7,5,2]

		X					
X							
						X	
				X			
							X
	X						
			X				
					X		

[1,5,0,6,3,7,2,4]

				X			
X							
			X				
					X		
							X
	X						
						X	
		X					

[1,5,7,2,0,3,6,4]

						X	
X							
		X					
							X
					X		
			X				
	X						
				X			

[1,6,2,5,7,4,0,3]

				X			
X							
							X
					X		
		X					
						X	
	X						
			X				

[1,6,4,7,0,3,5,2]

			X				
X							
				X			
							X
					X		
		X					
						X	
	X						

[1,7,5,0,2,4,6,3]

	X						
					X		
X							
						X	
			X				
							X
		X					
				X			

[2,0,6,4,7,1,3,5]

				X			
		X					
X							
						X	
	X						
							X
					X		
			X				

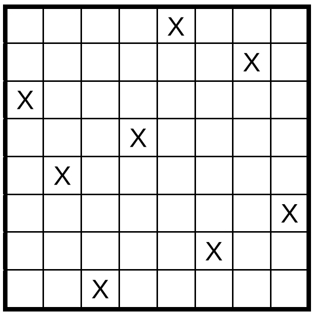
[2,4,1,7,0,6,3,5]

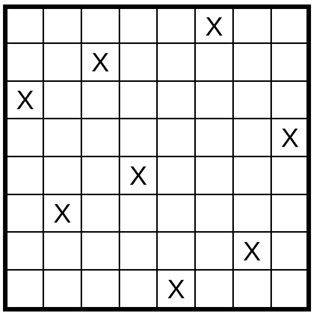
							X
		X					
X							
					X		
	X						
				X			
						X	
			X				

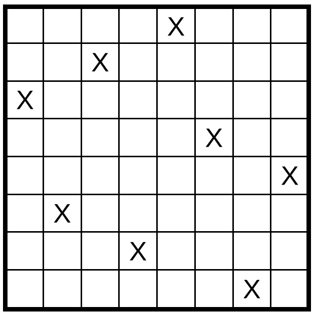
[2,4,1,7,5,3,6,0]

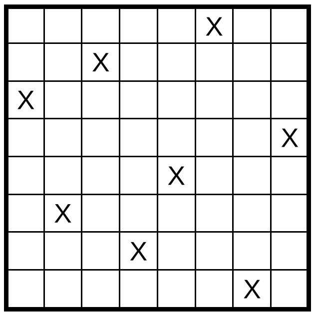
			X				
					X		
X							
				X			
	X						
							X
		X					
						X	

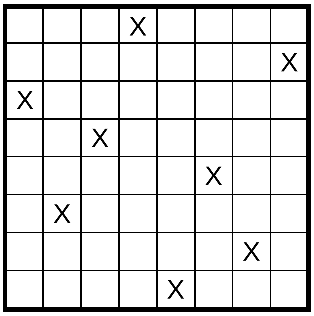
[2,4,6,0,3,1,7,5]

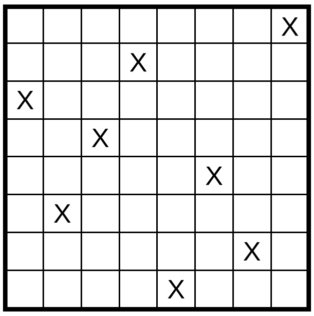

[2,4,7,3,0,6,1,5]

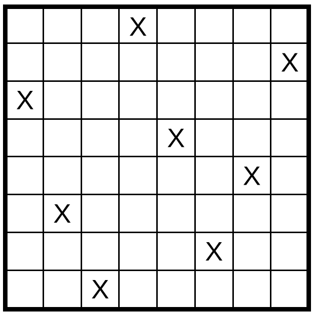

[2,5,1,4,7,0,6,3]

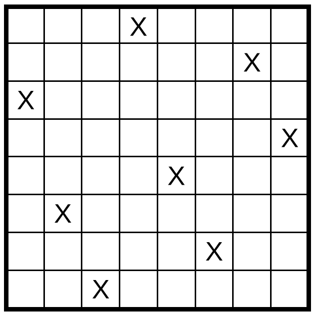

[2,5,1,6,0,3,7,4]

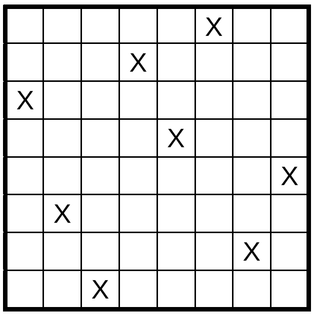

[2,5,1,6,4,0,7,3]

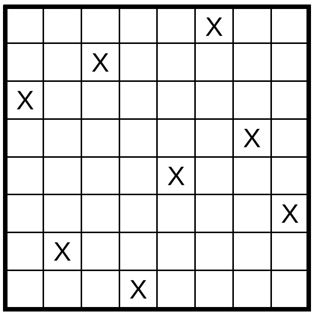

[2,5,3,0,7,4,6,1]

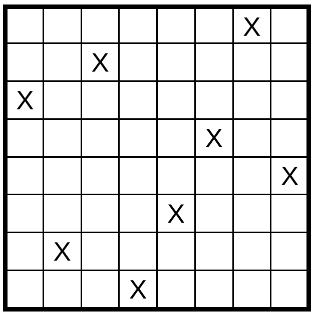

[2,5,3,1,7,4,6,0]

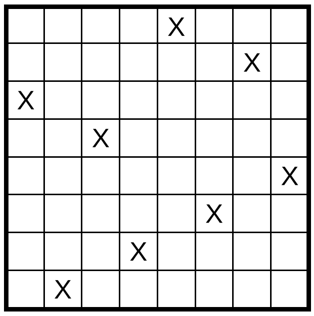

[2,5,7,0,3,6,4,1]

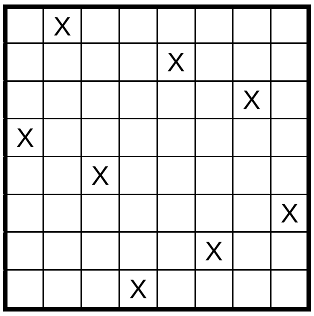

[2,5,7,0,4,6,1,3]

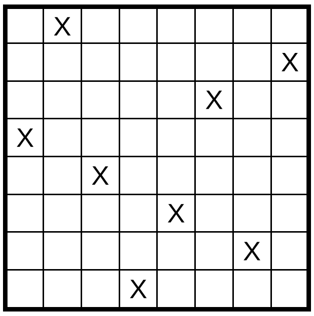

[2,5,7,1,3,0,6,4]

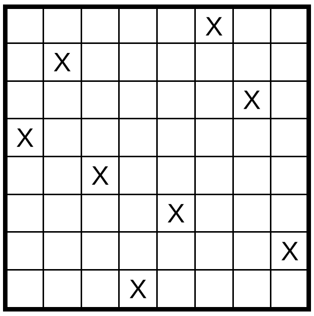

[2,6,1,7,4,0,3,5]

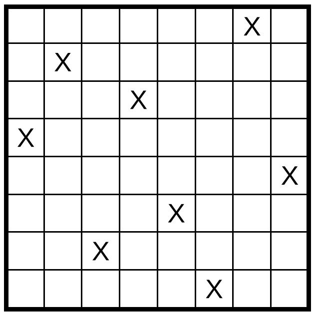

[2,6,1,7,5,3,0,4]

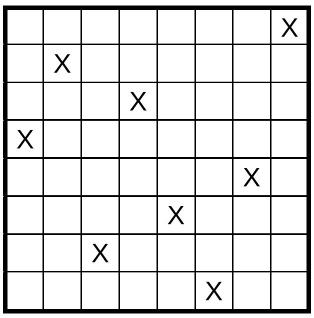

[2,7,3,6,0,5,1,4]

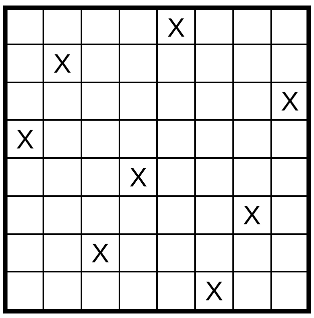

[3,0,4,7,1,6,2,5]

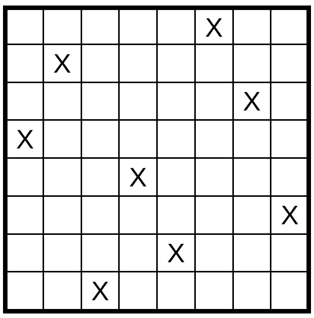

[3,0,4,7,5,2,6,1]

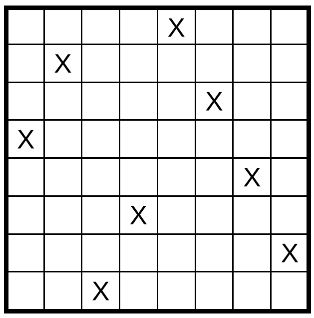

[3,1,4,7,5,0,2,6]


[3,1,6,2,5,7,0,4]


[3,1,6,2,5,7,4,0]


[3,1,6,4,0,7,5,2]


[3,1,7,4,6,0,2,5]


[3,1,7,5,0,2,4,6]

		X					
				X			
						X	
X							
			X				
	X						
							X
					X		

[3,5,0,4,1,7,2,6]

					X		
			X				
						X	
X							
							X
	X						
				X			
		X					

[3,5,7,1,6,0,2,4]

					X		
							X
				X			
X							
	X						
						X	
			X				

[3,5,7,2,0,6,4,1]

		X					
					X		
							X
X							
				X			
						X	
	X						
			X				

[3,6,0,7,4,1,5,2]

						X	
				X			
		X					
X							
					X		
							X
	X						
			X				

[3,6,2,7,1,4,0,5]

					X		
			X				
						X	
X							
		X					
				X			
	X						
							X

[3,6,4,1,5,0,2,7]

				X			
							X
			X				
X							
		X					
					X		
	X						
						X	

[3,6,4,2,0,5,7,1]

		X					
					X		
			X				
X							
							X
				X			
						X	
	X						

[3,7,0,2,5,1,6,4]

		X					
					X		
							X
X							
			X				
						X	
				X			
	X						

[3,7,0,4,6,1,5,2]

				X			
						X	
			X				
X							
		X					
							X
					X		
	X						

[3,7,4,2,0,6,1,5]

	X						
					X		
							X
		X					
X							
			X				
						X	
				X			

[4,0,3,5,7,1,6,2]

	X						
				X			
						X	
			X				
X							
							X
					X		
		X					

[4,0,7,3,1,6,2,5]

	X						
						X	
				X			
							X
X							
			X				
					X		
		X					

[4,0,7,5,2,6,1,3]

						X	
	X						
					X		
		X					
X							
			X				
							X
				X			

[4,1,3,5,7,2,0,6]

							X
	X						
				X			
		X					
X							
						X	
			X				
					X		

[4,1,3,6,2,7,5,0]

			X				
	X						
							X
					X		
X							
		X					
				X			
						X	

[4,1,5,0,6,3,7,2]

			X				
	X						
						X	
				X			
X							
							X
					X		
		X					

[4,1,7,0,3,6,2,5]

		X					
					X		
	X						
						X	
X							
			X				
							X
				X			

[4,2,0,5,7,1,3,6]

		X					
				X			
	X						
							X
X							
						X	
			X				
					X		

[4,2,0,6,1,7,5,3]

					X		
							X
	X						
			X				
X							
						X	
				X			
		X					

[4,2,7,3,6,0,5,1]

		X					
							X
			X				
						X	
X							
					X		
	X						
				X			

[4,6,0,2,7,5,3,1]

		X					
				X			
							X
			X				
X							
						X	
	X						
					X		

[4,6,0,3,1,7,5,2]

					X		
		X					
						X	
			X				
X							X
	X						
				X			

[4,6,1,3,7,0,2,5]

					X		
		X					
				X			
						X	
X							
			X				
	X						
							X

[4,6,1,5,2,0,3,7]

					X		
		X					
				X			
							X
X							
			X				
	X						
						X	

[4,6,1,5,2,0,7,3]

			X				
							X
				X			
		X					
X							
						X	
	X						
					X		

[4,6,3,0,2,7,5,1]

			X				
						X	
				X			
		X					
X							
					X		
							X
	X						

[4,7,3,0,2,5,1,6]

			X				
					X		
							X
		X					
X							
						X	
				X			
	X						

[4,7,3,0,6,1,5,2]

	X						
			X				
					X		
							X
		X					
X							
						X	
				X			

[5,0,4,1,7,2,6,3]

			X				
	X						
				X			
							X
					X		
X							
		X					
						X	

[5,1,6,0,2,4,7,3]

			X				
	X						
							X
				X			
						X	
X							
		X					
					X		

[5,1,6,0,3,7,4,2]

		X					
						X	
	X						
							X
				X			
X							
			X				
					X		

[5,2,0,6,4,7,1,3]

		X					
					X		
	X						
				X			
							X
X							
						X	
			X				

[5,2,0,7,3,1,6,4]

		X					
					X		
	X						
						X	
				X			
X							
							X
			X				

[5,2,0,7,4,1,3,6]

				X			
						X	
	X						
					X		
		X					
X							
			X				
							X

[5,2,4,6,0,3,1,7]

				X			
						X	
	X						
					X		
		X					
X							
							X
			X				

[5,2,4,7,0,3,1,6]

						X	
			X				
	X						
				X			
							X
X							
		X					
					X		

[5,2,6,1,3,7,0,4]

						X	
			X				
	X						
							X
					X		
X							
		X					
				X			

[5,2,6,1,7,4,0,3]

				X			
						X	
	X						
			X				
							X
X							
		X					
					X		

[5,2,6,3,0,7,1,4]

		X					
					X		
							X
	X						
			X				
X							
						X	
				X			

[5,3,0,4,7,1,6,2]

						X	
		X					
							X
	X						
				X			
X							
					X		
			X				

[5,3,1,7,4,6,0,2]

			X				
						X	
				X			
	X						
					X		
X							
		X					
							X

[5,3,6,0,2,4,1,7]

			X				
					X		
							X
	X						
						X	
X							
		X					
				X			

[5,3,6,0,7,1,4,2]

				X			
		X					
							X
			X				
						X	
X							
					X		
	X						

[5,7,1,3,0,6,4,2]

	X						
						X	
		X					
					X		
							X
				X			
X							
			X				

[6,0,2,7,5,3,1,4]

			X				
	X						
						X	
		X					
					X		
							X
X							
				X			

[6,1,3,0,7,4,2,5]

				X			
	X						
			X				
					X		
							X
		X					
X							
						X	

[6,1,5,2,0,3,7,4]

		X					
						X	
	X						
							X
					X		
			X				
X							
				X			

[6,2,0,5,7,4,1,3]

					X		
			X				
	X						
							X
				X			
						X	
X							
		X					

[6,2,7,1,4,0,5,3]

					X		
		X					
						X	
	X						
			X				
							X
X							
				X			

[6,3,1,4,7,0,2,5]

					X		
		X					
						X	
	X						
							X
				X			
X							
			X				

[6,3,1,7,5,0,2,4]

			X				
						X	
		X					
							X
	X						
				X			
X							
					X		

[6,4,2,0,5,7,1,3]

			X				
	X						
						X	
		X					
					X		
							X
				X			
X							

[7,1,3,0,6,4,2,5]

				X			
	X						
			X				
						X	
		X					
							X
					X		
X							

[7,1,4,2,0,6,3,5]

		X					
				X			
	X						
							X
					X		
			X				
						X	
X							

[7,2,0,5,1,4,6,3]

		X					
					X		
			X				
	X						
							X
				X			
						X	
X							

[7,3,0,2,5,1,6,4]