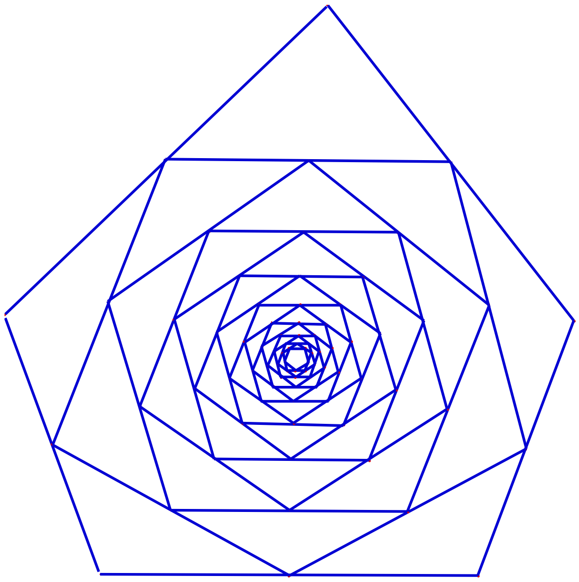
Quels polygones sont formés par les milieux des côtés d’un autre polygone ?

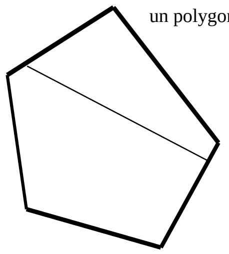
par … des collèges André Doucet de Nanterre et Victor Hugo de Noisy-le-Grand

enseignants : Martine Brunstein, Danielle Buteau, Marie-Christine Chanudeaud, Pierre Lévy

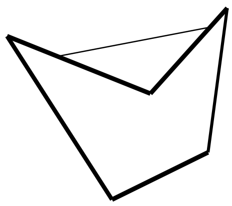
chercheur : Jacqueline Zizi



En partant d’un polygone à n côtés, le polygone des milieux a lui aussi n côtés puisqu’à chaque côté, on associe un milieu et à chaque milieu, un sommet. Sachant qu’un polygone a autant de sommets que de côtés, alors le polygone des milieux à autant de côtés que celui de départ.



un polygone convexe

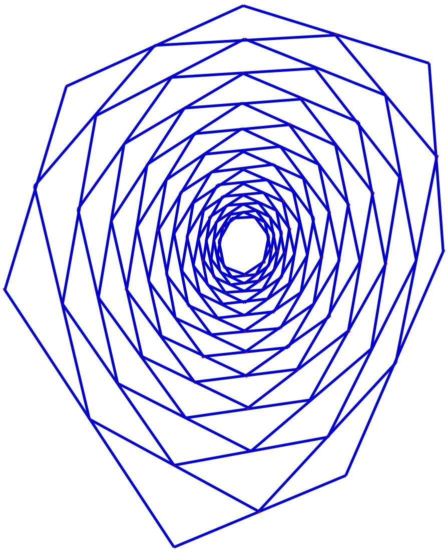


un polygone non convexe

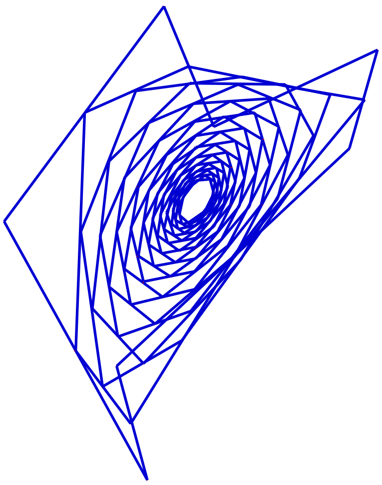
On a très vite remarqué que lorsque le polygone de départ est convexe, le polygone des milieux est lui aussi toujours convexe.

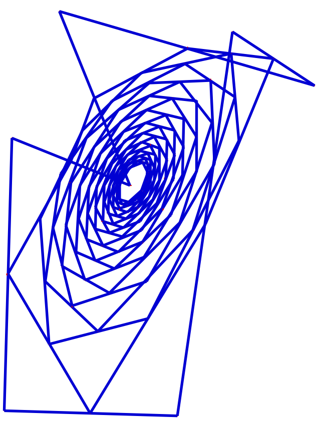
On rappelle qu’un polygone est convexe lorsque tout segment reliant deux points quelconques de ce polygone y est entièrement contenu. Un polygone non convexe possède au moins un angle rentrant. Les polygones convexes ont donc tous leurs angles saillants ou plats.

Si l’on joint trois points quelconques de trois côtés consécutifs, l’angle ainsi déterminé est saillant ou au maximum plat. Cela est vrai si les points choisis sont les milieux de trois côtés consécutifs ; on a ainsi montré qu’en partant d’un polygone convexe, le polygone des milieux est lui aussi convexe.



Si le polygone de départ est non convexe, on s'aperçoit qu'en répétant l'opération des milieux plusieurs fois, le polygone obtenu finit par devenir convexe. Cela est encore vrai si le polygone de départ est croisé. On finit là encore par obtenir un polygone convexe.



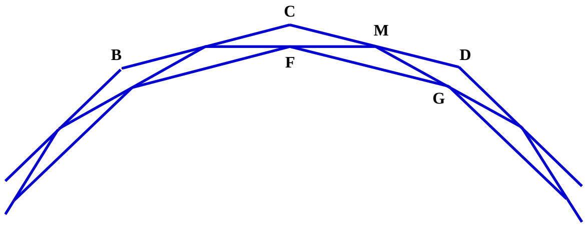


En fait, quelque soit le polygone initial, *plus on répète l'opération des milieux, plus le polygone obtenu tend à devenir régulier.*

Cette remarque est restée au stade de la conjecture car nous n'avons toujours pas réussi à établir une preuve générale.

Nous avons par contre étudié des cas particuliers.

Nous avons pensé, après avoir observé de nombreux exemples que l'on voyait des côtés parallèles ; cette impression est fausse en général mais elle est vraie pour les polygones réguliers.



Plaçons-nous dans un polygone régulier à n côtés. Les angles ∠ DMG et ∠ FGM sont égaux (la preuve est facile ; on utilise le fait que les triangles sont isocèles !). Les droites (CD) et (FG) sont coupées par la droite (MG). Les angles ∠ DMG et ∠ FGM sont donc alternes-internes. Puisqu'ils sont de même mesure, (CD) et (FG) sont parallèles.

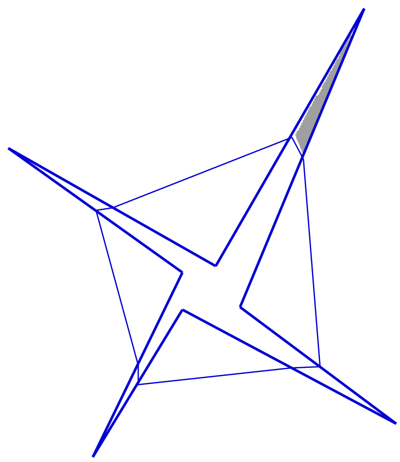
(remarque : il faut démontrer que le polygone obtenu est régulier et qu'à une rotation près, c'est une réduction du premier. Calculer le coefficient !!!).

Afin de compléter l'étude purement géométrique du problème, nous nous sommes intéressés aux problème des grandeurs.

Pour un polygone convexe, le polygone des milieux étant inscrit dans le polygone de départ, le périmètre ainsi que l'aire de celui-ci sont inférieurs à ceux du polygone de départ.

Par contre, si le polygone n'est pas convexe, la question est moins évidente.

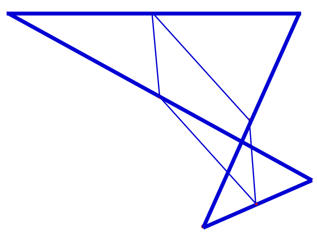
Le polygone en gras est le polygone de départ, le polygone des milieux est en traits fins :



Si l'on se place dans le triangle hachuré, on remarque que la somme des longueurs de deux côtés est strictement supérieure à la longueur du troisième côté. De même dans tous les autres triangles. On démontre ainsi que *le périmètre de la figure non convexe est toujours supérieur à celui de la figure obtenue*.

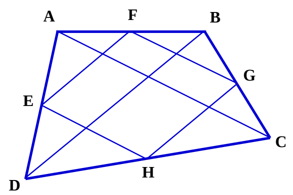
Pour l'aire, nous n'avons pas réussi à émettre une conjecture (dans l'exemple, on a l'impression que l'aire du polygone des milieux est supérieure à l'aire du polygone de départ).

Si le polygone initial est croisé, la démonstration précédente est encore valable.



A ce stade de notre recherche, nous avions beaucoup de conjectures et de questions sans réponse. Nous avons décidé alors d'étudier en détail le cas des triangles et des quadrilatères avec l'espoir de faire apparaître des résultats plus généraux.

Les quadrilatères sont pour ce problème des polygones très sympathiques car dès que l'on applique l'opération des milieux, on obtient un parallélogramme.



En effet si ABCD est un quadrilatère quelconque, et EFGH le polygone des milieux, par l'utilisation de la propriété de la droite des milieux, on prouve que :

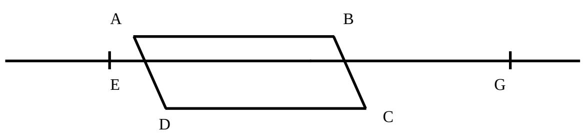
- les droites (DB) et (EF) d'une part et les droites (GH) et (DB) d'autre part sont parallèles. Donc les droites (FG) et (EH) sont parallèles.

- les droites(AC) et (FG) d'une part et les droites (AC) et (EH) d'autre part sont parallèles. Donc les droites (FG) et (EH) sont parallèles.

EFGH est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles, c'est donc un parallélogramme. Cette démonstration reste valable si le quadrilatère ABCD est non convexe ou croisé.

On vient de démontrer que le polygone des milieux de tout quadrilatère est un parallélogramme. Mais, *un parallélogramme est-il toujours le polygone des milieux d'un quadrilatère ?*

Et dans ce cas … comment le construire ?

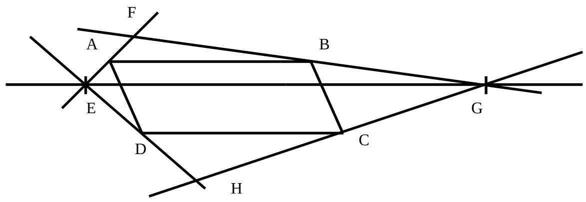


Soit ABCD un parallélogramme.

On trace une droite (EG) parallèle à la droite (AB) et à l'intérieur de la bande délimitée par les droites (AB) et (DC).

EG = 2AB.

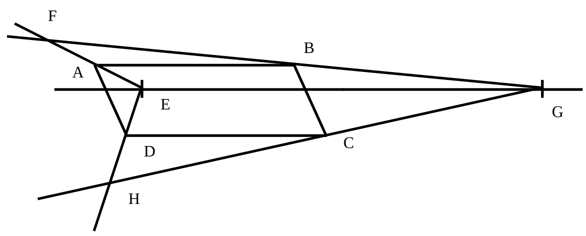
Les points E et F n'appartiennent pas au parallélogramme ABCD.



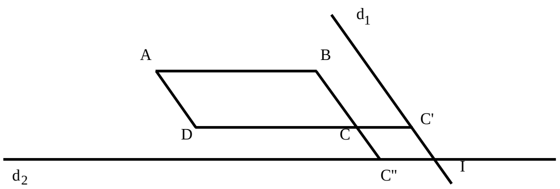
Les droites (EA) et (BG) se coupent en F et les droites (ED) et (GC) en H. On vient de construire un quadrilatère EFGH dont le polygone des milieux est bien le parallélogramme ABCD. On ne justifiera pas cette construction car nous n'avons fait qu'utiliser les remarques des démonstrations précédentes.

Comme il existe une infinité de droites (EG) possibles, il existe donc une infinité de quadrilatères de départ ayant pour polygone des milieux le parallélogramme ABCD. Mais ces quadrilatères sont-ils tous convexes ?

En vérité, il est très facile d'obtenir par la même construction un quadrilatère non convexe. Il suffit de placer le point E ou le point F à l'intérieur du parallèlogramme.

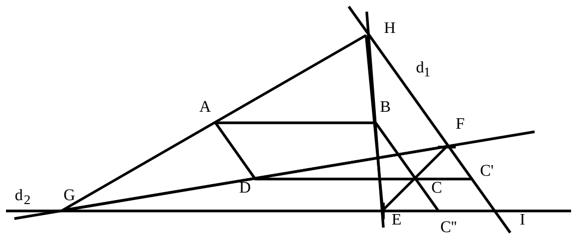


On peut obtenir des quadrilatères croisés.



On trace une droite d_1 parallèle à (BC) et une droite d_2 parallèle à (DC). I est le point d'intersection de ces deux droites.

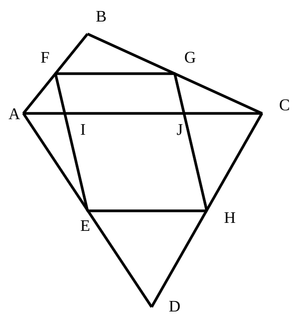
Soit C'et C"les projetés respectifs du point C sur la droite d_1 parallèlement à la droite d_2 et sur la droite d_2 parallèlement à la droite d_1. Soit E (respectivement F) le point tel que C" soit le milieu de [IE] (respectivement de [IF]).



Les droites (EB) et d_1 sont sécantes en H et les droites (FD) et d_2 en G.

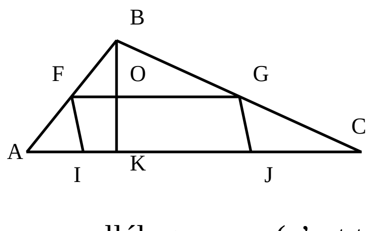
On obtient ainsi (nous en laissons la preuve au lecteur) un quadrilatère croisé EFGH dont le polygone des milieux est bien le parallélogramme ABCD. Là encore, il en existe une infinité.

Si l'on se restreint au cas des quadrilatères, il est possible d'étudier des rapports entre les aires de la figure de départ et celle du parallélogramme des milieux.



ABCD est un quadrilatère quelconque convexe et EFGH le parallèlogramme des "ses" milieux ; I (respectivement J) est le point d'intersection de la droite (AC) avec la droite (FE) (respectivement avec (GH)).

Plaçons-nous dans le triangle ABC et soit (BK) sa hauteur issue de B et O son intersection avec (FG).



FGJI est un parallélogramme (c'est très facile à montrer).

Aire FGJI = FG $\times$ OK
Aire ABC = (AC $\times$ BK) / 2
Dans le triangle ABC, d'après la propriété de la droite des milieux, FG = 1/2 AC. De même dans le triangle BKC, on montre que O est le milieu de [BK] (réciproque de la propriété précédente). Donc OK = 1/2 BK. Ainsi :

Aire FGJI = FG $\times$ OK = (AC $\times$ BK) / 4
= Aire ABC / 2.

$$\frac{\text{Aire FGJI}}{\text{Aire ABC}} = \frac{1}{2}$$

Un raisonnement similaire dans le triangle ACD nous prouve que

$$\frac{\text{Aire IJHE}}{\text{Aire ACD}} = \frac{1}{2}$$

On a alors :

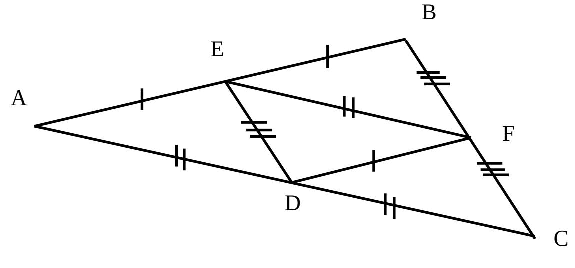
Aire ABCD = Aire ABC + Aire ACD

Et on obtient ainsi :

Aire ABCD = Aire FGJI / 2.

Cette démonstration reste valable (avec quelques aménagements) si le quadrilatère de départ est non convexe ou croisé. L'aire du parallélogramme des milieux est égale dans tous les cas à la moitié de l'aire du quadrilatère de départ.

Nous n'avons pas pu établir de règle similaire en ce qui concerne les périmètres. Dans le cas où le polygone de départ n'est plus un quadrilatère, le calcul du rapport devient très difficile (et nous ne l'avons pas fait !) sauf dans le cas des triangles.



ABC est un triangle quelconque et DEF le triangle de ses milieux. Toujours à l'aide de “la droite des milieux”, nous prouvons que les quatre triangles de la figure sont superposables et donc de même aire.

On prouve ainsi que l'aire du triangle des milieux est le quart de celle du triangle de départ. Ce qui est amusant, c'est que dans ce cas, le périmètre du triangle des milieux est égal à la moitié de celui du triangle de départ (la preuve n'est pas difficile).

Comme vous l'avez sans doute constaté, ce sujet nous a fait ouvrir d'innombrables portes ; il nous a fallu cheminer longtemps avant de cerner un peu mieux quelles questions précises nous allions tenter de résoudre. Hélas, peut-être par manque de temps, il reste de nombreux points sans réponses ou avec des réponses partielles.

En voici quelques uns que nous proposons à une prochaine équipe de MATh.en.JEANS.

Point n°1 : Comment se fait-il que tous les polygones des milieux construits à partir d'un polygone quelconque deviennent convexes au bout d'une ou plusieurs “opération des milieux” ?

Point n°2 : Pourquoi les polygones des milieux sont-ils de plus en plus réguliers lorsque l'on répète l'opération ?

Point n°3 : Pourquoi dans les cas de polygones quelconques, lorsqu'on répète l'opération on obtient des côtés qui semblent parallèles alors que d'autres ne le sont pas ?

Point n°4 : Existe-t-il un rapport entre le périmètre du polygone de départ et celui des milieux ?

Point n°5 : Existe-t-il un rapport entre l'aire du polygone de départ et celle des milieux ?

Point n°6 : Existe-t-il un un point précis vers lequel “convergent” les polygones des milieux ??