

Nombre à somme déterminée

Année 2025 – 2026

Fusil Basile, 1ère générale ; Diassé Bousso, BTS Chimie ; Gueye Ndeye Ndagou, BTS Chimie

Établissement : Lycée Léonard de Vinci - Calais

Enseignante : Anne Boenisch

Chercheur·Chercheuse(s) : Christophe Bourel, Pierre-Louis Giscard, ULCO

1. Présentation du sujet

On appelle nombre “Triple à cinq” un nombre entier et positif tel que toute somme de 3 de ses chiffres consécutifs soit un multiple de 5.

Par exemple :

→ 415 est triple à cinq car $4+1+5 = 10 = 2 \times 5$

→ 730285 est triple à cinq car $7+3+0 = 10$ et $3+0+2 = 5$ et $0+2+8 = 10$ et $2+8+5 = 15$

→ 4153 n'est pas triple à cinq car $4+1+5 = 10$ mais $1+5+3 = 9$

Les nombres “Triples à cinq” sont-ils rares ?

Que se passe-t-il si on change les entiers 3 et 5 pour d'autres entiers entre 0 et 9 ?

2. Les triples à 5

Dans toute la suite de l'article, on notera les “Triples à cinq” comme suivant : 3 à 5.

2.1. Programme Python

Nous avons créé un programme Python qui :

- décompose les nombres ;

```
5 def decomposition(a):
6     decompo = []
7     q = a
8     while q != 0:
9         reste = q % 10
10        decompo.append(reste)
11        q = q // 10
12    return decompo
```

- les analyse, c'est à dire dit s'ils sont 3 à 5 ou pas ;

```

16 def verifi(decompo):
17     i = 0
18     L = len(decompo)
19     while i + 2 < L :
20         somme = decompo[i] + decompo[i+1] + decompo[i+2]
21         reste = somme % 5
22         if reste == 0:
23             i = i+1
24         else :
25             return(0)
26     return(1)
27
28
29
30 def testun(a):
31     liste = decomposition(a)
32     return verifi(liste)

```

- donne la proportion de triples à cinq dans un intervalle donné.

```

37 def test3(a):
38     c = 100
39     nombre = 0
40     while c < a :
41         vf = testun(c)
42         c = c + 1
43         if vf == 1:
44             nombre = nombre + 1
45     print (nombre, 'sur', c-100)
46     print (nombre / (c-100))
47
48
49 def test4(a):
50     c = 1000
51     nombre = 0
52     while c < a :
53         vf = testun(c)
54         c = c + 1
55         if vf == 1:
56             nombre = nombre + 1
57     print (nombre, 'sur', c-1000)
58     print (nombre / (c-1000))

```

```

61 def test5(a):
62     c = 10000
63     nombre = 0
64     while c < a :
65         vf = testun(c)
66         c = c + 1
67         if vf == 1:
68             nombre = nombre + 1
69     print (nombre, 'sur', c-10000)
70     print (nombre / (c-10000))

```

La fonction test3(a) calcule la proportion de nombres triple à 5 parmi les nombres à 3 chiffres (de 100 à a). Nous l'avons utilisée avec a = 1000.

La fonction test4(a) calcule la proportion de nombres triple à 5 parmi les nombres à 4 chiffres (de 1000 à a).

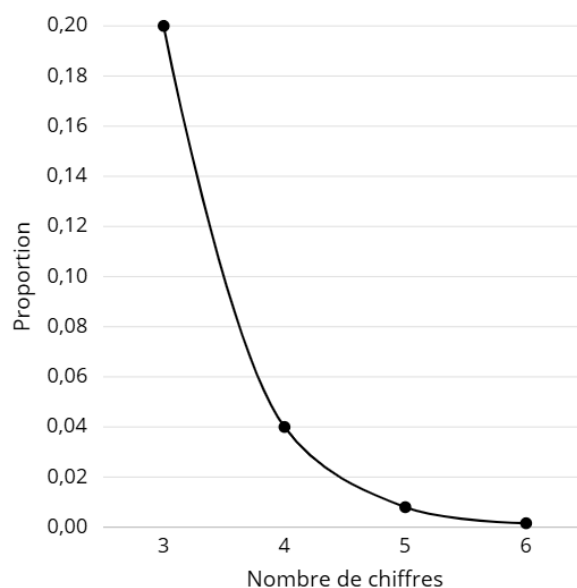
2.2. Résultats

On peut former un nombre 3 à 5 à quatre chiffres en se basant sur un nombre 3 à 5 à trois chiffres au bout duquel on rajoute un chiffre de telle sorte qu'il soit toujours 3 à 5.

Par exemple, en partant de 753, on peut rajouter un 2 pour former 7532 qui est aussi 3 à 5, mais également 7537.

On remarque qu'en partant d'un nombre à trois chiffres on peut former deux nombres à quatre chiffres.

À l'aide des données du programme Python, on peut construire un graphique représentant la proportion de 3 à 5 en fonction du nombre de chiffres des nombres.



On remarque que la proportion diminue d'un facteur cinq à chaque fois que l'on augmente le nombre de chiffre de 1 : $0,2 \rightarrow 0,04 \rightarrow 0,008 \rightarrow 0,0016$.

Cela s'explique puisque le nombre de 3 à 5 est multiplié par 2 dans un intervalle 10 fois plus grand à chaque fois qu'on augmente les nombres testés d'un chiffre.

La proportion est donc divisée par 5 à chaque fois qu'on rajoute un chiffre.

2.3. Démonstration

Dans cette démonstration, nous utilisons les congruences qui sont vues en terminale.

Dans toute la démonstration, a , b , c et d sont des nombres entiers.

- Nombre à trois chiffres :

Soient $a, b, c \in [0;9]$.

Soit le nombre à trois chiffres abc .

On considère que ce nombre est 3 à 5.

abc est 3 à 5 $\Leftrightarrow a+b+c \equiv 0[5]$

- Nombre à quatre chiffres :

Soient $a, b, c, d \in [0;9]$.

Soit un nombre à quatre chiffres $abcd$.

$b+c+d \equiv 0[5] \Leftrightarrow (b+c+d) - (a+b+c) \equiv 0[5] \Leftrightarrow d - a \equiv 0[5] \Leftrightarrow d \equiv a[5]$

Pour d on a 2 choix possibles, a et $a \pm 5$, sur le nombre total de choix, 10.

Donc la probabilité que d convienne est $2/10$ soit $1/5$.

La proportion de 3 à 5 pour un nombre à 4 chiffres vaut :
 (proportion pour un nombre à 3 chiffres) $\times$ 1/5 soit $(1/5) \times (1/5) = 1/25$

Par récurrence **(1)** :

Proportion P en fonction du nombre n de chiffres : $P(n) = \frac{1}{5^{n-2}}$.

Propriété :

La proportion de nombres triples à cinq parmi les nombres à n chiffres est $\frac{1}{5^{n-2}}$.

3. Généralisation

3.1. Les X à 5

Un X à 5 est un nombre entier et positif tel que toute somme de X de ses chiffres consécutifs soit un multiple de 5.

Nous avons adapté le programme Python pour calculer la proportion des X à 5.

Pour calculer la proportion, on ne teste que les nombres ayant le même nombre de chiffres.

Exemple : pour les nombres à 4 chiffres, on ne prend pas la proportion sur [0;9999] mais sur [1000;9999].

Par ailleurs, on ne peut pas trouver de nombres 4 à 5 dans un nombre à 3 chiffres, donc il y a des cases marquées d'une croix dans le tableau.

Voici le tableau des résultats :

	3 à 5	4 à 5	5 à 5	6 à 5
3 chiffres	0,2	X	X	X
4 chiffres	0,04	0,2	X	X
5 chiffres	0,008	0,04	0,2	X
6 chiffres	0,0016	0,008	0,04	0,2

On remarque un motif en "escalier".

3.2. Les triples à Y

Un triple à Y (noté 3 à Y dans le tableau) est un nombre entier et positif tel que toute somme de 3 de ses chiffres consécutifs soit un multiple de Y.

Grâce au programme, on obtient les résultats suivants :

	3 à 2	3 à 3	3 à 4	3 à 7
3 chiffres	0,5	1/3	$\approx 0,2488$	0,14
4 chiffres	0,25	$\approx 0,1113$	$\approx 0,06333$	$\approx 0,0213$
5 chiffres	0,125	$\approx 0,037933$	$\approx 0,01633$	$\approx 0,00328$
6 chiffres	0,0625	$\approx 0,012953$	$\approx 0,00418$	$\approx 0,00048$

Si Y divise 10 (1,2,5) alors la proportion évolue de manière régulière.

Si Y ne divise pas 10 (3,4,6,7,8,9) alors la proportion évolue de façon irrégulière.

Nous avons trouvé une explication à cette irrégularité :

- Nous avons prouvé que pour un nombre 3 à 5 à n chiffres, il y a toujours 2 façons de le compléter pour obtenir un nombre 3 à 5 à n+1 chiffres.

- De la même façon, il y aura toujours 5 façons de compléter un nombre 3 à 2 à n chiffres pour obtenir un nouveau nombre 3 à 2.

Ex : 7135 est un nombre 3 à 2. Pour obtenir un nombre 3 à 2 à 5 chiffres, je dois ajouter un chiffre a tel que $5+a$ soit un multiple de 2, c'est à dire un nombre pair. On peut donc le compléter avec 1, 3, 5, 7 ou 9, c'est à dire n'importe quel chiffre impair.

Ceci est valable à chaque fois que le dernier chiffre du nombre de départ est impair.

Si le dernier chiffre est pair, on pourra le compléter avec un chiffre pair : 0, 2, 4, 6 ou 8.

Il y a donc toujours 5 façons de compléter le nombre.

- Dans le cas des nombres 3 à 3, le nombre de façons de compléter n'est pas toujours la même.

Si le nombre 3 à 3 finit par 5, on peut le compléter avec un chiffre a tel que $5+a$ soit un multiple de 3. On pourra donc utiliser les chiffres 1 ($5+1=6$), 4 ($5+4=9$) et 7 ($5+7=12$) : il y a 3 possibilités.

Par contre, si le nombre 3 à 3 finit par 6, on peut le compléter avec les chiffres 0 ($6+0=6$), 3 ($6+3=9$), 6 ($6+6=12$) et 9 ($6+9=15$) : il y a 4 possibilités.

Comme il y a 3 possibilités pour certains nombres et 4 pour d'autres, la proportion n'évolue pas de façon régulière. Ceci est dû au fait que 3 n'est pas un diviseur de 10.

- On peut faire le même type de raisonnement pour les nombres 3 à 4, 3 à 6, 3 à 7, 3 à 8 et 3 à 9.

3.3. Les X à Y

Un triple à Y est un nombre entier et positif tel que toute somme de X de ses chiffres consécutifs soit un multiple de Y.

Nous allons vous présenter les résultats obtenus pour les nombres X à 7,

Nous avons choisi 7 car 7 n'est pas un diviseur de 10.

Grâce au programme, on obtient les résultats suivants :

	3 à 7	4 à 7	5 à 7	6 à 7
3 chiffres	0,14	X	X	X
4 chiffres		$\approx 0,1424$	X	X
5 chiffres			$\approx 0,14289$	X
6 chiffres				$\approx 0,142886$

$1/7 \approx 0,142857143$

On remarque que plus X est grand, plus la première proportion semble tendre vers $1/7$.

3.4. Conclusion de la généralisation : conjecture

On conjecture que pour tous les X à Y, la première proportion de X à Y pour les nombres à X chiffres :

- vaut $1/Y$ si Y divise la base (ici 10),
- tend vers $1/Y$ si Y ne divise pas la base. Plus X est grand, plus la proportion est proche de $1/Y$.

4. Conclusion

Nous avons démontré que les nombres triples à 5 apparaissent avec une proportion de $\frac{1}{5^{n-2}}$ pour les nombres à n chiffres.

Pour les nombres X à Y , nous avons observé que :

- si Y est un diviseur de 10, alors la proportion de nombres X à Y est divisée par $\frac{1}{Y}$ à chaque fois qu'on ajoute un chiffre au nombre. L'évolution est donc régulière.
- si Y n'est pas un diviseur de 10, alors l'évolution de la proportion ne semble pas régulière quand le nombre de chiffres augmente pour X et Y constants. Mais nous avons observé que la proportion de nombres X à Y dans les nombres à X chiffres tend vers $\frac{1}{Y}$ quand X augmente.

Note d'édition

[\(1\)](#) Cette preuve par récurrence n'est pas complète, loin de là. Lecteurs et lectrices peuvent facilement la faire en n'oubliant pas l'initialisation de la récurrence.