

# La valse des polygones

Année 2020 – 2021

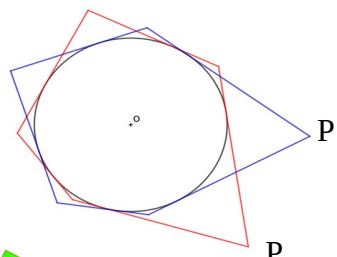
**Élèves de 3<sup>ème</sup>** : Jules GUERIN et Diduan LE BLAY.

**Établissement** : Collège Alain-Fournier d'Orsay (91).

**Enseignante** : Florence FERRY.

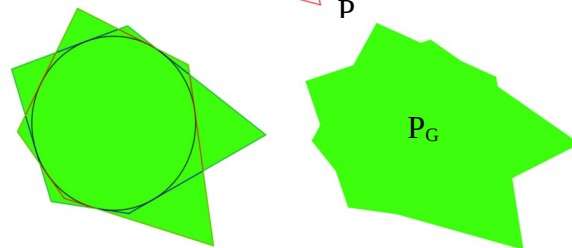
**Chercheur** : Olympio HACQUARD.

**Le sujet** : On construit un polygone  $P$  dont tous les côtés sont tangents à un cercle de centre  $O$ . On construit ensuite un polygone  $P'$  en faisant tourner  $P$  autour de  $O$ .

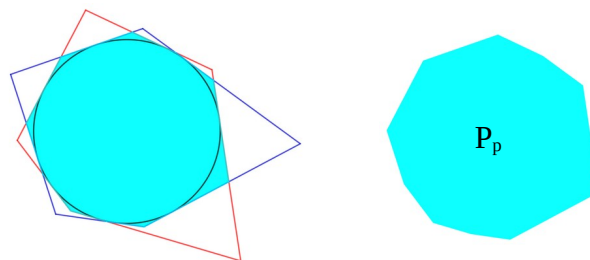


À partir de  $P$  et  $P'$  on obtient deux nouvelles figures :

- le « grand » polygone appelé  $P_G$  qui est l'union des deux polygones.



- le « petit » polygone  $P_p$  qui est l'intersection des deux.

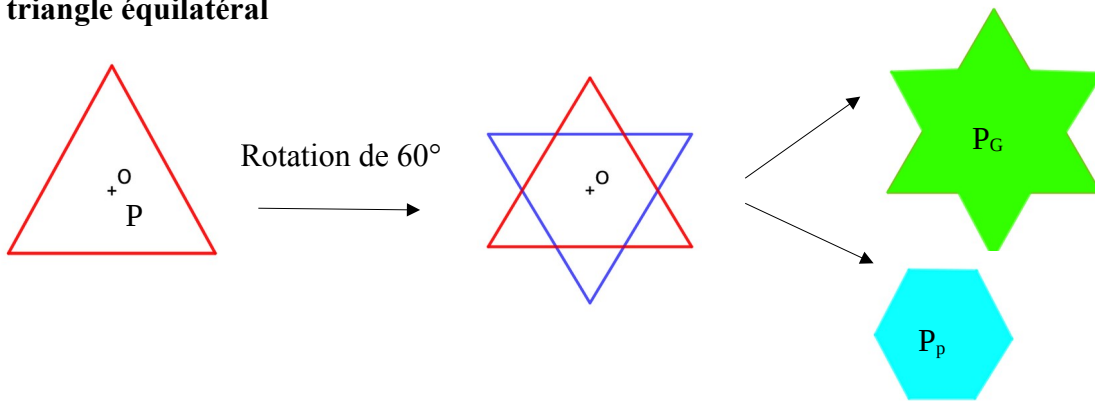


Etudier les différentes propriétés (formes possibles, périmètres, aires) des « grand » et « petit » polygones obtenus.

## I – Etude des formes

Pour commencer notre recherche, nous allons nous intéresser à la nature des « grand » et « petit » polygones obtenus. Nous allons étudier des figures simples avec une rotation particulière.

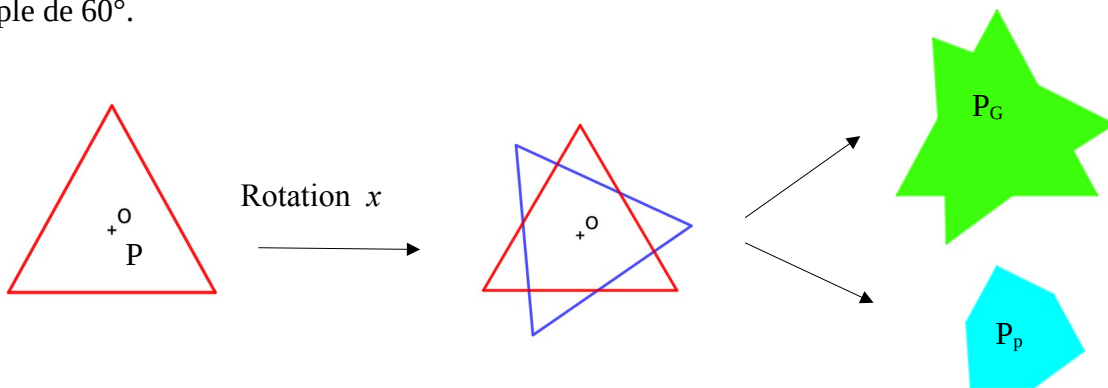
### 1) Le triangle équilatéral



**Conclusion :**  $P_G$  a 12 côtés et  $P_P$  en a 6 ; les deux polygones obtenus sont réguliers.

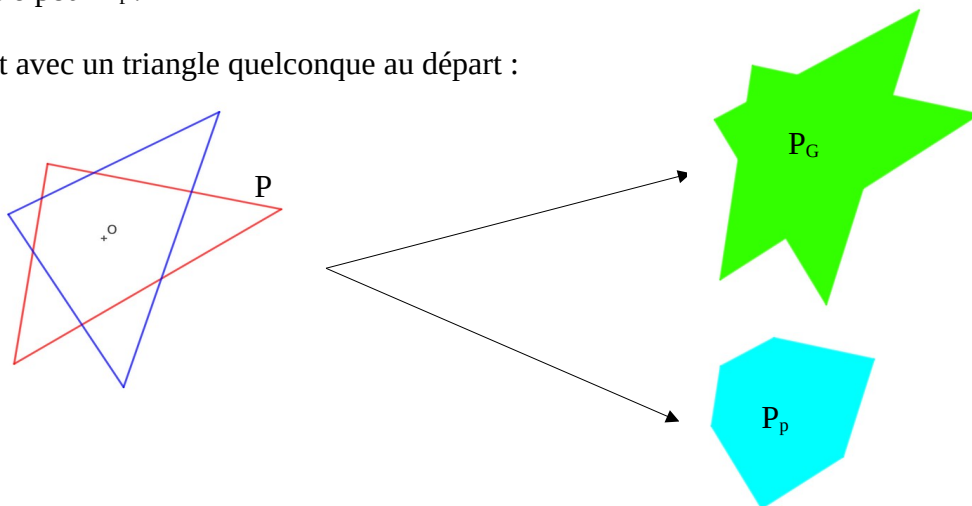
Remarque : lorsqu'on effectue une rotation de  $120^\circ$ , qui correspond à l'angle au centre du polygone régulier de départ, la figure reste inchangée ;  $P$ ,  $P'$ ,  $P_G$  et  $P_P$  sont confondus.

Observons maintenant ce qu'il se passe si on fait une rotation d'angle  $x$  quelconque, autre qu'un multiple de  $60^\circ$ .



**Conclusion :** Les polygones obtenus ne sont pas réguliers mais nous avons encore 12 côtés pour  $P_G$  et 6 pour  $P_P$ .

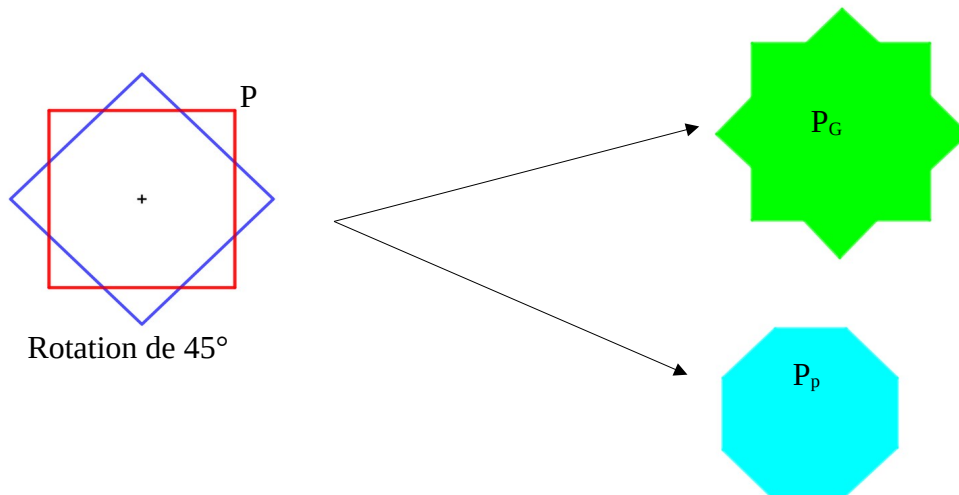
Et avec un triangle quelconque au départ :



**La conclusion reste la même.**

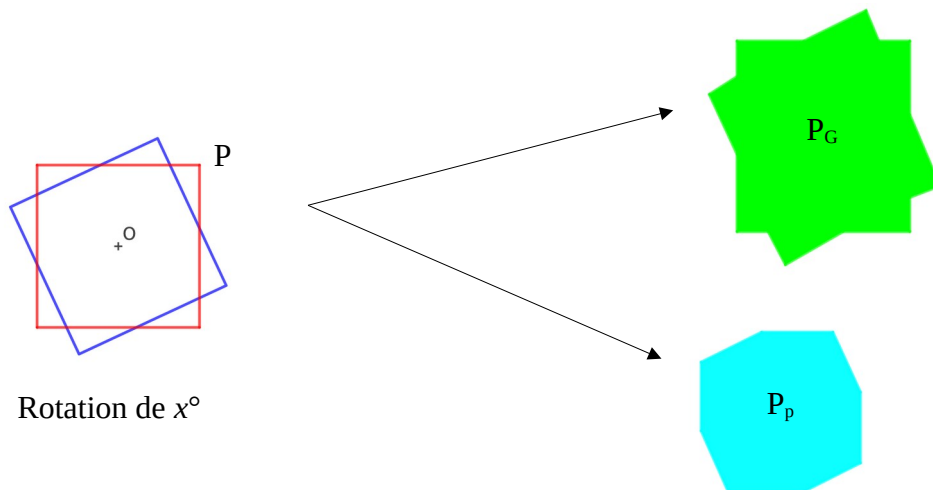
## 2) Le carré

Avec une rotation de  $90^\circ$ , qui correspond à l'angle au centre, il ne se passe rien.



**Conclusion :** Les polygones obtenus sont réguliers ; nous comptons 16 côtés pour  $P_G$  et 8 pour  $P_p$ .

Si la rotation est d'angle  $x$  quelconque, autre qu'un multiple de  $45^\circ$  :



**Conclusion :** Les polygones obtenus ne sont pas réguliers mais nous avons encore 16 côtés pour  $P_G$  et 8 pour  $P_p$ .

Après ces exemples, nous avons émis 2 conjectures :

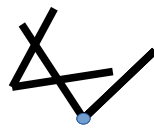
Conjecture 1 : Lorsque  $P$  est un polygone régulier d'angle au centre  $x$  et que l'angle de rotation est  $x/2$  (ou un multiple de  $x/2$ ) alors  $P_G$  et  $P_p$  sont aussi des polygones réguliers ; en particulier si l'angle de rotation est  $x$ , alors la figure reste identique :  $P$ ,  $P_G$  et  $P_p$  sont confondus.

Conjecture 2 : Si  $P$  a  $n$  côtés alors  $P_G$  a  $4n$  côtés et  $P_p$  en a  $2n$ . (sauf pour les cas où la figure de départ et celle d'arrivée sont confondues).

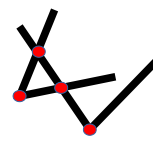
Regardons de plus près et tentons d'expliquer cette dernière conjecture. On va se concentrer sur un sommet du polygone de départ ; après la rotation, ce sommet en a « produit » 4 pour le grand polygone :



Au départ

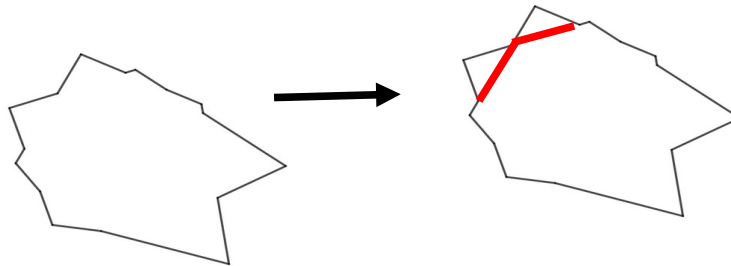


Après la rotation



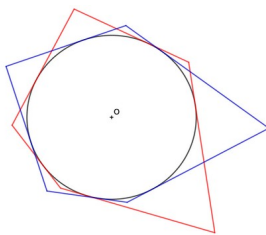
Sommetts engendrés sur  $P_G$

Maintenant, en joignant un sommet sur deux, on divise par 2 le nombre de côtés de  $P_G$  pour avoir le nombre de sommets de  $P_p$ .

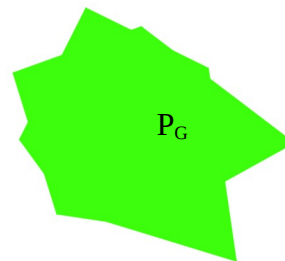


Malheureusement, à force de chercher, nous avons trouvé un contre-exemple qui rend notre conjecture 2 fausse.

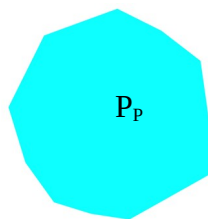
Nous avons pris un pentagone quelconque.



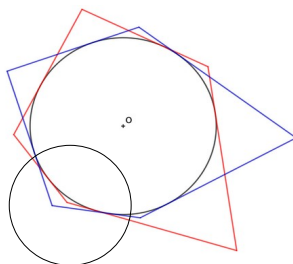
Pentagone (5 côtés)  
et sa rotation.



16 côtés



9 côtés



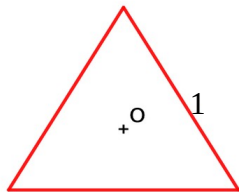
Ici par exemple, nous pouvons constater que le sommet du polygone de départ (en rouge) se retrouve à « l'intérieur », il ne va donc pas donner les 4 sommets attendus.

## II – Etude des périmètres et des aires

Reprenons notre étude avec des figures particulières. Nous cherchons une relation entre le périmètre de P et ceux de  $P_G$  et  $P_p$ ; de même pour l'aire des trois figures.

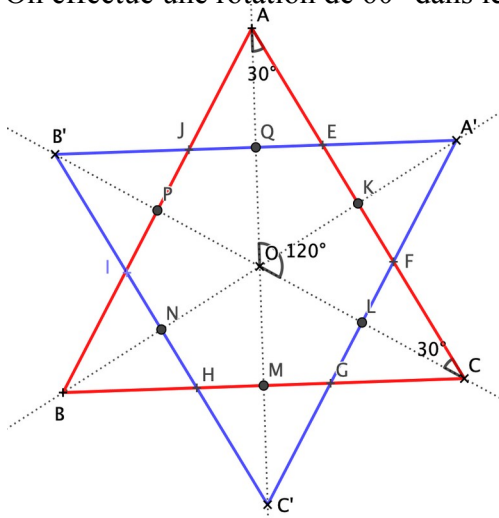
### 1) Triangle équilatéral de côté 1

Commençons par observer les périmètres.



Périmètre de P : 3

On effectue une rotation de  $60^\circ$  dans le sens horaire.



Avec les nom donnés aux points sur la figure ci-contre :

[AO] et [OC] sont les rayons du cercle circonscrit à ABC donc :  $AO = OC$ . AOC est donc isocèle en O et donc les angles de la base sont de même mesure ; de plus la somme des angles d'un triangle fait  $180^\circ$  donc :  $\widehat{AOC} = 120^\circ$

C'est l'angle au centre de P.

$$\widehat{KOC} = 60^\circ \quad \widehat{OAC} = \widehat{OCA} = (180 - 120) : 2 = 30^\circ \quad \text{or}$$

$$\widehat{OKC} = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ \quad (\text{angle de rotation}) \quad \text{donc :}$$

$$\widehat{OKA} = 90^\circ$$

De même on a :

$$\text{Donc : } \widehat{QEK} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

Avec un raisonnement identique pour chacun des sommets, on démontre que tous les angles de  $P_p$ , qui est un hexagone, sont tous égaux à  $120^\circ$ .

Par la rotation :

Les images de [IJ], [JE], [EF], [FG], [GH] et [HI] sont respectivement : [JE], [EF], [FG], [GH], [HI] et [IJ]. La rotation conserve les longueurs donc :  $IJ = EF = FG = GH = HI$ .

Finalement,  $P_p$  a tous ses angles de même mesure et tous ses côtés de même longueur donc c'est un hexagone régulier.

$$\widehat{A'EF} = \widehat{EFA'} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \quad , \quad \widehat{EA'F} = 60^\circ \quad (A'B'C' \text{ est équilatéral comme } ABC).$$

A'EF est donc un triangle équilatéral de même que FCG, GC'H, HBI, IB'J et JAE. Comme  $P_p$  a tous ses côtés de même longueur,  $P_G$  a également tous ses côtés de même longueur et son périmètre est bien deux fois plus grand que  $P_p$ .

Calcul des périmètres :  $AE = EF = FC$  donc  $EF = \frac{1}{3}$  Donc le périmètre de  $P_p$  est :  $\frac{1}{3} \times 6 = 2$  et celui de  $P_G$  est :  $2 \times P_p = 4$  .

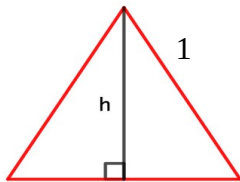
**Conclusion :**

*Périmètre de  $P_G = 2 \times$  périmètre de  $P_p$*

*Périmètre de  $P_p = \frac{2}{3} \times$  périmètre de  $P$*

*Périmètre de  $P_G = \frac{4}{3} \times$  périmètre de  $P$*

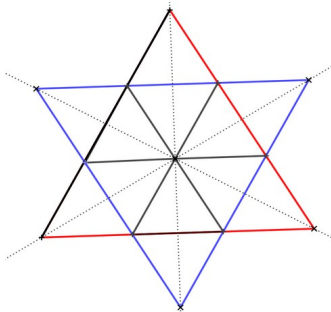
**Nous nous intéressons maintenant aux aires**



On trace une hauteur du triangle, on appelle  $h$  sa longueur. D'après le théorème de Pythagore :

$$h = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{4} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

On peut donc calculer l'aire :  $A = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times 1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$



On découpe le triangle de départ en 9 triangles égaux. On peut donc calculer l'aire :

$$\text{Aire de } P_G : 12 \times \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{9} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \text{Aire de } P_p = 6 \times \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{9} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

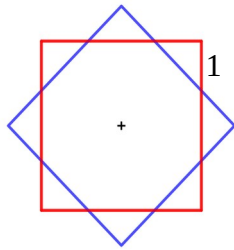
**Conclusion :**

*Aire de  $P_G = 2 \times$  aire de  $P_p$  ; Aire de  $P_p = \frac{2}{3} \times$  Aire de  $P$  et Aire de  $P_G = \frac{4}{3} \times$  aire de  $P$*

On remarque que ce sont les mêmes résultats que pour le périmètre ; pour une rotation quelconque, nous n'avons pas retrouvé ces résultats : nous sommes encore en train de chercher une formule dans ce cas.

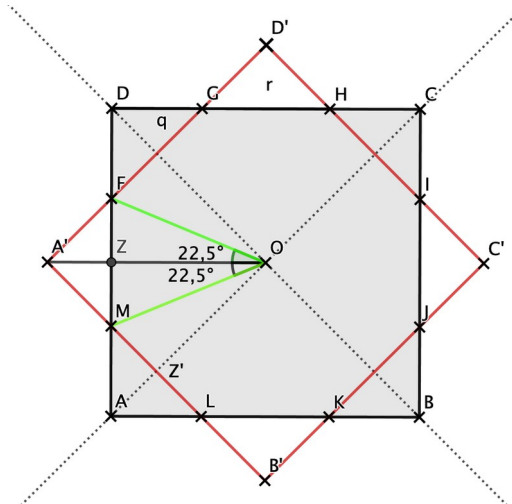
## 2) Le carré de côté 1

On effectue une rotation de  $45^\circ$  dans le sens horaire.



Périmètre de P : 4

Aire de P : 1



Avec données portées sur la figure ci-contre :

Dans le carré obtenu par rotation,  $A'B'C'D'$  :

$$\widehat{OA'B'} = 45^\circ$$

On a aussi :  $\widehat{A'ZM} = 90^\circ$

La somme des angles d'un triangle fait  $180^\circ$  donc, dans le triangle  $A'ZM$  on a :

$$\widehat{A'MZ} = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ = 45^\circ$$

On a de même :  $\widehat{AML} = 45^\circ$

$A'ZM$  et  $AZ'M$  ont chacun deux angles de  $45^\circ$ , ce sont des triangles isocèles et on a :  $A'Z = ZM$  et  $AZ' = Z'M$ .

De plus, par rotation,  $[A'Z]$  est l'image de  $[AZ']$  donc :  $A'Z = AZ'$ .

Finalement :  $ZM = Z'M$ . M est donc un point de la bissectrice de  $\widehat{ZOZ'}$ , donc  $[OM)$  est cette bissectrice et  $\widehat{ZOM} = 22,5^\circ$ .

Dans  $FOZ$  rectangle en Z :  $\tan 22,5^\circ = FZ/OZ$  d'où :  $\tan 22,5^\circ = FZ/(1/2)$  et donc :

$$FZ = \tan 22,5^\circ / 2$$

On en déduit le périmètre de  $P_p$  :  $16FZ = 8 \tan 22,5^\circ$  ce qui fait environ 3,3.

$A'FZ$  est rectangle en Z, d'après le théorème de Pythagore :  $A'F = \sqrt{2 \times \left(\frac{\tan 22,5^\circ}{2}\right)^2}$ .

On en déduit le périmètre de  $P_G$  :  $16A'F = 16 \times \frac{\tan 22,5^\circ}{2} \sqrt{2} = 8\sqrt{2} \tan 22,5^\circ$ .

**Conclusion** : Périmètre de P : 4 ; périmètre de  $P_p$  :  $8 \tan 22,5^\circ$  et périmètre de  $P_G$  :  $8\sqrt{2} \tan 22,5^\circ$

**Calcul des aires.**

$$\text{Aire de OFZ} : \frac{OZ \times FZ}{2} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{\tan 22,5^\circ}{2}}{2} = \frac{\tan 22,5^\circ}{8}$$

On en déduit l'aire de  $P_p$  :  $\frac{\tan 22,5^\circ}{8} \times 16 = 2 \times \tan 22,5^\circ$  .

En faisant la différence entre l'aire de  $P$  et celle de  $P_p$ , on obtient l'aire des quatre triangles rectangles  $A'FM$ ,  $GD'H$ ,  $IC'J$  et  $KB'L$  ; cette aire est de :  $1 - 2 \times \tan 22,5^\circ$  .

En ajoutant à cette aire, l'aire de  $P$ , on obtient l'aire de  $P_G$  qui est donc :  
 $1 + 1 - 2 \times \tan 22,5^\circ = 2 - 2 \times \tan 22,5^\circ$  .

**Conclusion** : Aire de  $P$  : 1 ; aire de  $P_p$  :  $2 \tan 22,5^\circ$  et aire de  $P_G$  :  $2 - 2 \tan 22,5^\circ$  .

Nous n'avons pas trouvé de conjecture reliant ces périmètres et ces aires ; de plus, en changeant d'angle, on ne retrouve pas ses résultats.

*Nous remercions notre chercheur de nous avoir accompagné lors de nos recherches tout au long de l'année..*