L’île au trésor

Année 2022 – 2023

Élèves de $4^{ème}$ **:** Tasnime BEN MECHKANA, Céleste CARNIER-RUEFF.

Élèves de $3^{ème}$ **:** Raphaël CHAUMONT MESSE, Juliette DECK, Lucas VILARINHO

Établissements : Collège Alain-Fournier et Collège Alexander Fleming. Orsay

Enseignantes : Florence FERRY, Delphine FILLION et Kaourintin LE GUIBAN.

Chercheurs : Emmanuel KAMMERER, Ecole polytechnique Paris-Saclay et Balthazar Flechelles à l’IHES à Bures sur Yvette.

Le sujet : Le capitaine FLINT a enterré son trésor sur une île. Sur cette île se trouvent deux arbres . Le trésor est placé à égale distance des deux arbres et de la plage. Combien de trous (au plus) faudra-t-il creuser pour le trouver ? Comment déterminer l’emplacement de ces trous ?

- On pourra d'abord supposer que le bord de l'île est une droite (l'île étant donc un demi-plan).
- Que dire si l'île est circulaire ?
- Si on ne suppose plus l'île circulaire, existe-t-il des formes d'îles pour lesquelles il faut creuser un grand nombre de trous ? et une infinité de trous ?

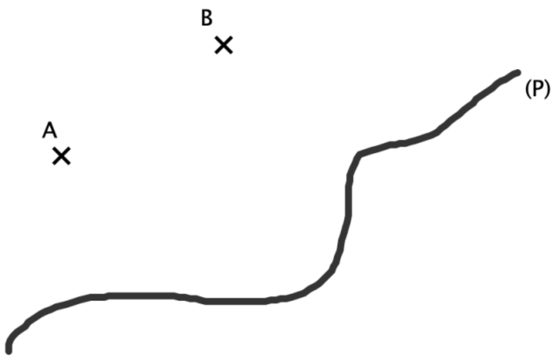
Résultats

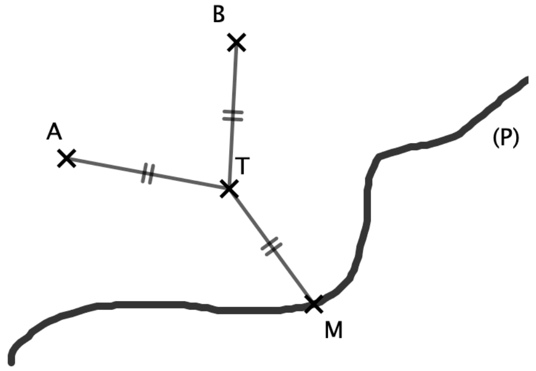
Pour l’île circulaire et les autres formes d’île, le nombre de trésors varie en fonction de la longueur du segment des deux arbres et de sa distance au bord de la plage.
Nous avons aussi remarqué que si le segment que forment les deux arbres passe au-dessus de la plage, **(**1) alors il n’y aura aucun trésor possible.

I - Approche du sujet

Dans toute la suite du sujet, nous nommerons A et B les points représentant les deux arbres, (D) la médiatrice de [AB] ; la courbe (P) sera la plage.

On cherche le point T représentant le trésor. On a TA = TB = TM, où M est un point de (P) tel que TM est la distance de T à (P).





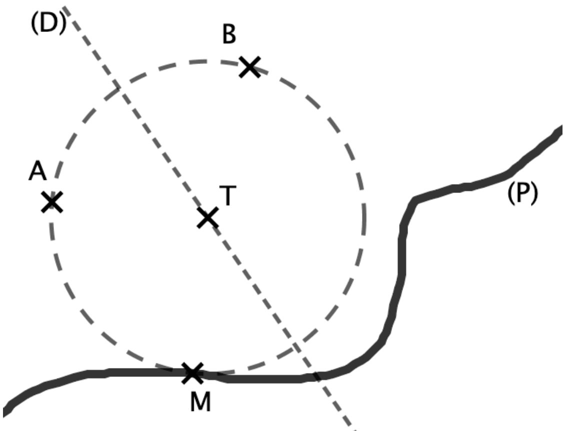
Où se trouve T ?

Remarque 1 : La distance TM est le plus court chemin entre T et (P) (2)

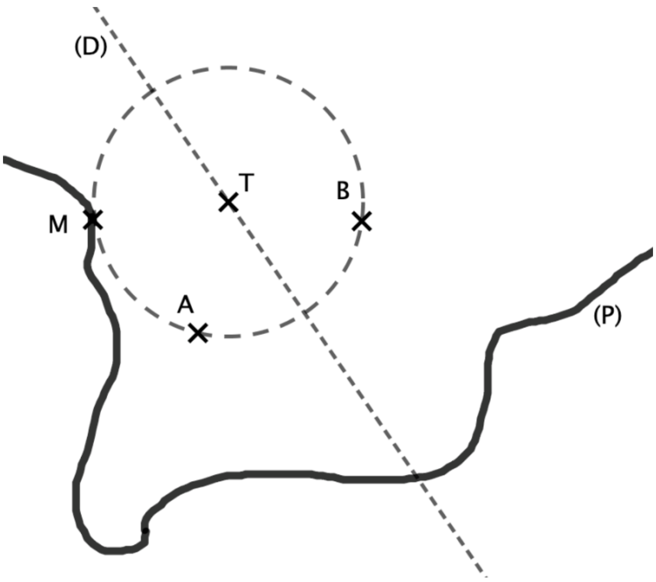
Propriété : si un point est à égale distance des extrémités d'un segment alors il appartient à la médiatrice du segment.

Cette propriété nous permet de faire une **deuxième remarque** : le trésor se trouve sur la médiatrice (D) du segment formé par les deux arbres A et B.

Avec ces deux remarques nous avons pu commencer nos recherches en utilisant Géogébra. On forme le segment qui relie les deux arbres A et B entre eux et on trace sa médiatrice (D).
On trace un cercle qui a pour centre un point (T) de la médiatrice et qui passe par A et B. On fait varier le point T sur (D) pour que le cercle soit tangent à la plage c'est-à-dire qu'il ne touche qu' en un point l'île.
On essaie ainsi de trouver le point M sur (P).



On redéplace le centre du cercle en le passant de l'autre côté du segment [AB] afin de trouver un nouveau cercle de nouveau tangent à la plage.



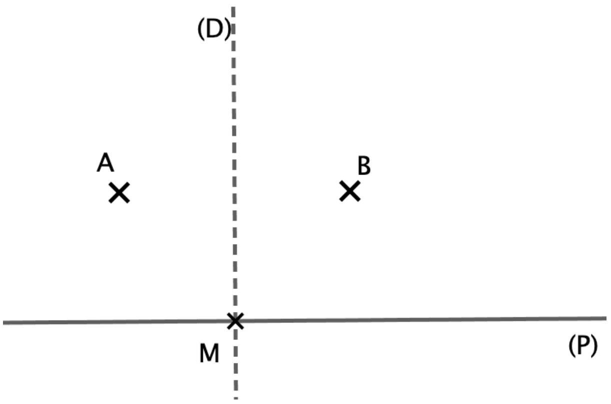
On a divisé notre recherche en plusieurs parties :

- La plage est une droite.
- La plage est un cercle.
- La plage a une autre forme.

Chaque fois deux questions se posent: combien faut-il creuser de trous et où faut-il creuser ?

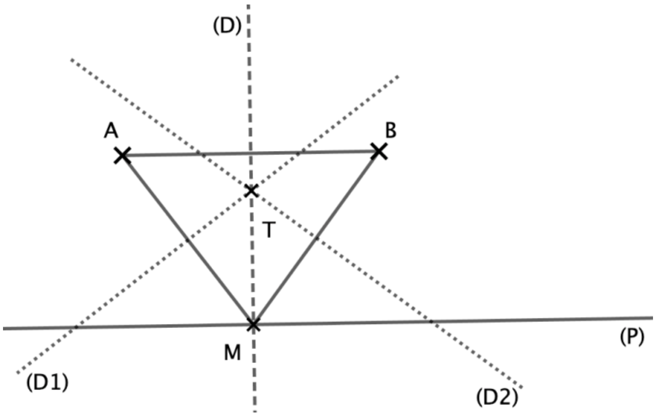
II - La plage est une droite

1 - Premier cas : (AB)//(P).



Le point M est le point d'intersection entre (D) et (P) puisque la distance d'un point (ici T qui appartiendra à (D)) à une droite est la longueur du segment perpendiculaire à cette droite, d'extrémités le point et un point de la droite.

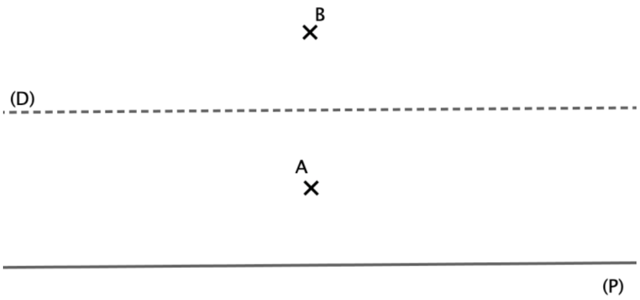
Le problème revient donc ici à chercher le centre du cercle circonscrit au triangle ABM ; pour le trouver, il suffit de tracer deux médiatrices (notées ici (D1) et (D2)).



Pour ce cas, il n’existe qu’un trou à creuser et on le détermine précisément.

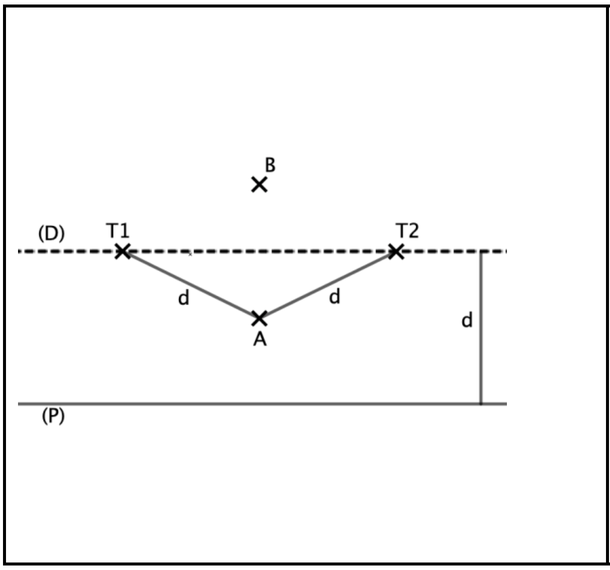
2 - Deuxième cas : (AB)⊥(P).

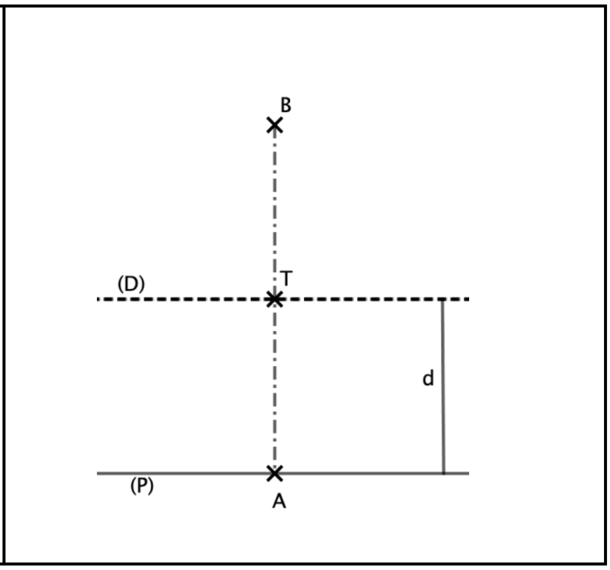
A et B sont forcément dans le même demi-plan délimité par la plage (sinon un arbre serait dans la mer).



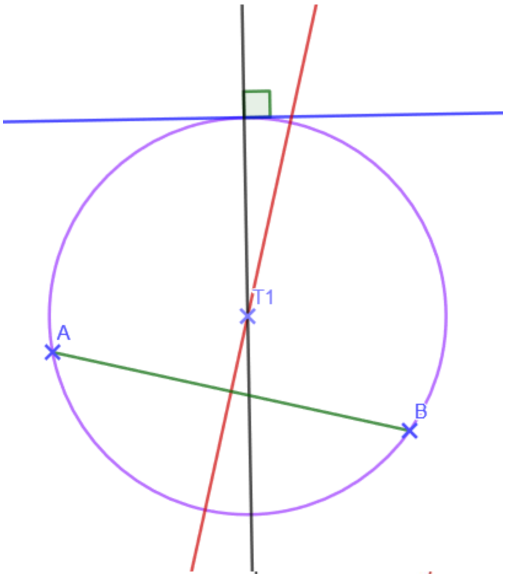
Dans ce cas, la distance d de T à la plage est constante. Il suffit donc de trouver T tel que : TA = d. Il y a ici il y a trois cas de figures :

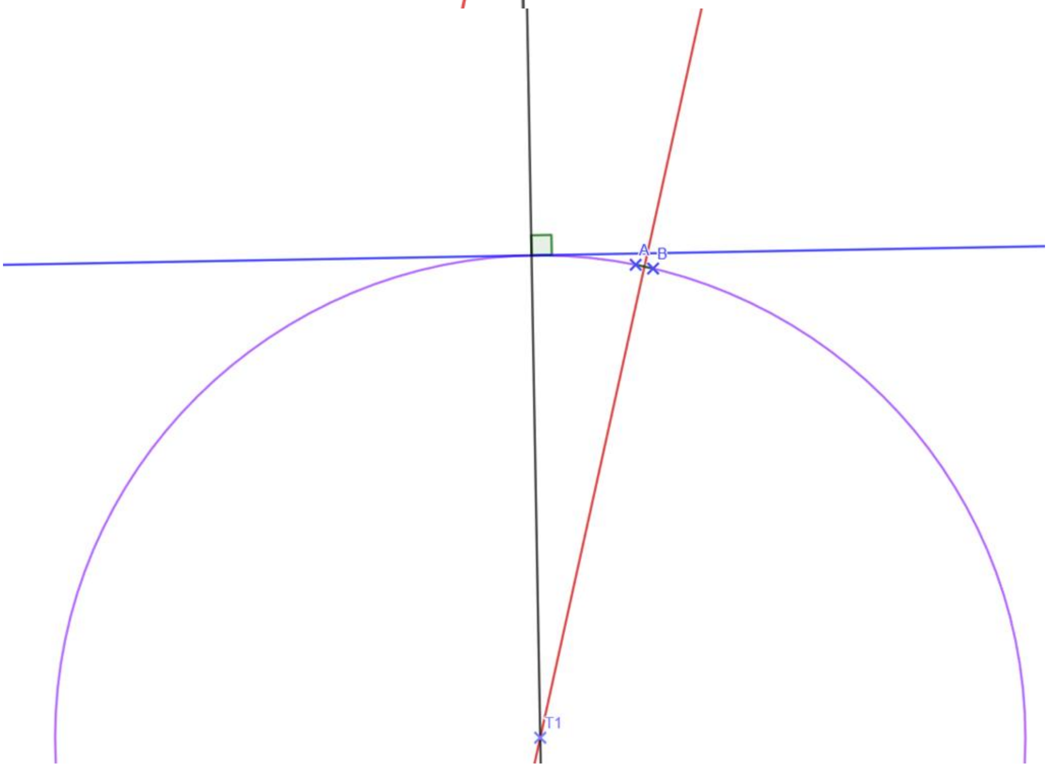
- deux possibilités de trous T1 et T2 , si AB/2 < d.
- Un seul trou T si AB/2 = d.
- Aucun trou si AB/2 > d





3 - Troisième cas : cas général - approche du résultat avec Geogebra

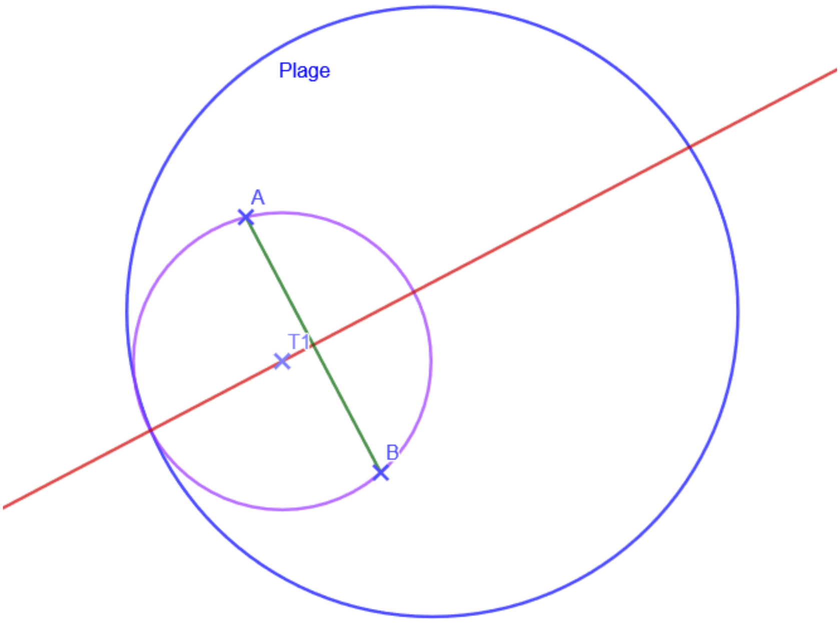




On a vu précédemment que le trésor T doit être placé sur la médiatrice de [AB] et le cercle de centre T passant par A et B doit être tangent à la plage donc nous avons déplacé T de telle façon que le cercle ne touche la plage qu'en un point et nous avons trouvé deux emplacements :

- T se trouve entre le segment d'extrémités des deux arbres et de la plage.
- T est très éloigné de la plage et du segment d'extrémités les deux arbres.

III - La plage est un cercle



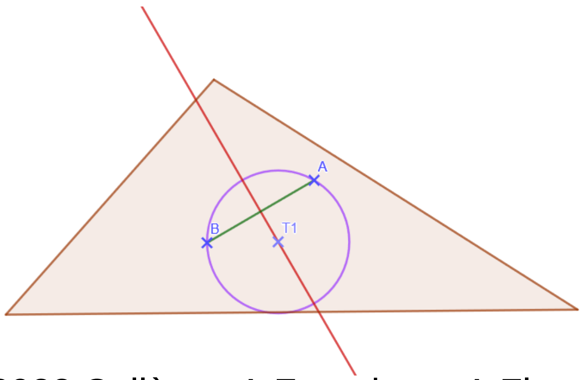
En traçant un cercle représentant l'île, on répète les mêmes étapes précédentes et l'on peut trouver soit un, soit deux trésors.

Nous avons émis la conjecture suivante:
Puisque l'île est un cercle, les deux arbres doivent être sur le cercle ou compris à l'intérieur pour qu'au moins un trésor existe, le cercle formé ne pourra jamais être plus grand que l'île, il pourra être au maximum confondu avec l'île si les deux arbres sont sur le cercle, diamétralement opposés

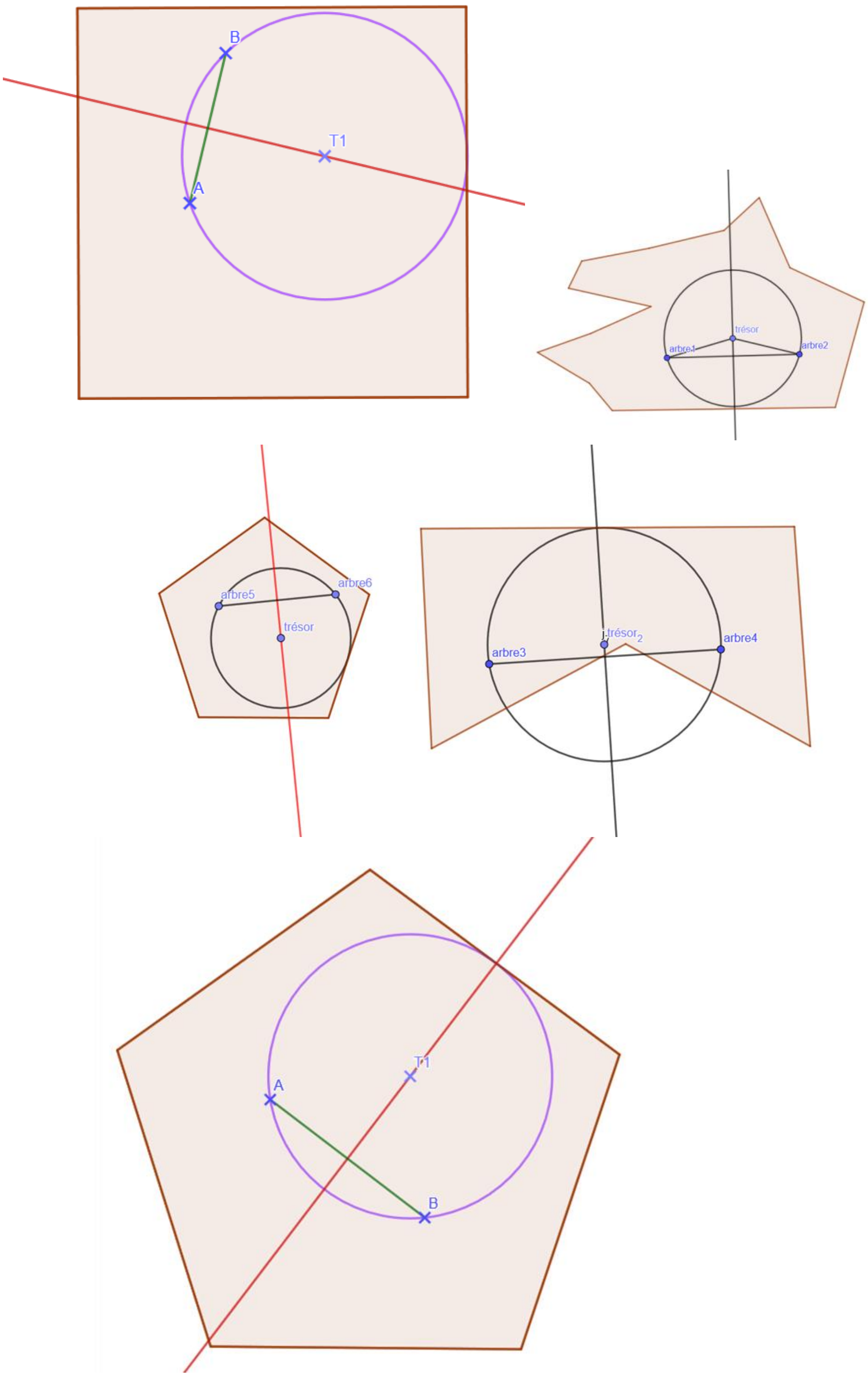
IV - Exemples d'autres formes d'îles

On modélise toutes les étapes en remplaçant l'île par une figure quelconque.
Nous avons conjecturé qu'il peut y avoir zéro, un ou deux trésors.

Dans le cas d'un triangle le nombre de trésors dépend de :
- la longueur du segment entre les deux arbres ;
- la distance des arbres à un des angles du triangle ; 3
- de la mesure de l'angle du triangle le plus proche du segment.



Dans les autres cas de polygone, les constats sont les mêmes que pour le triangle. Dans la cas d’un polygone concave, on peut avoir plusieurs trous. (4)

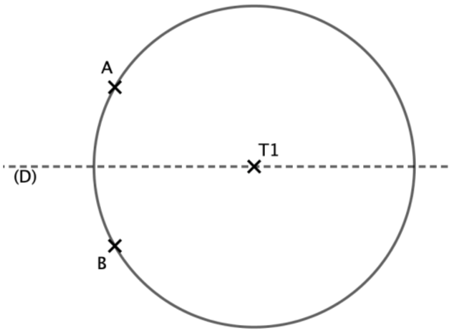


V - Peut-il y avoir de nombreux trous ?

Pour répondre à cette question, nous allons, cette fois-ci, fixer le nombre de trous et regarder les conditions que doit respecter la plage.

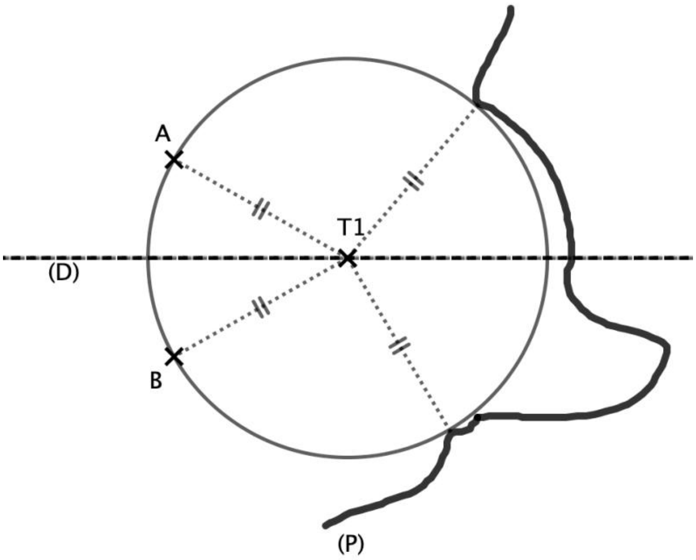
1) Un trou

Fixons un point T1 représentant le trou.



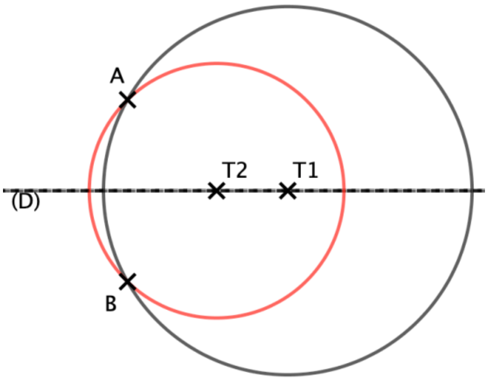
Puisque T1 est à égale distance de A, B et la plage (P), la plage doit toucher le cercle de centre T1 passant par A et B mais ne peut pas rentrer à l'intérieur ; sinon il y aurait un point de la plage plus près de T1 que A ou B.

Voici un exemple de plage qui répond à ces conditions :

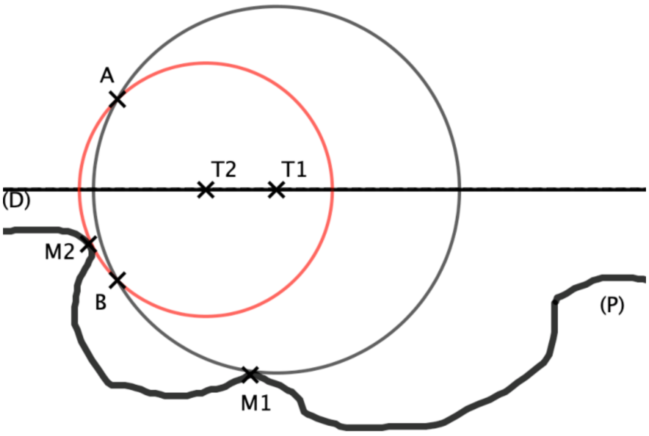


2) Deux trous

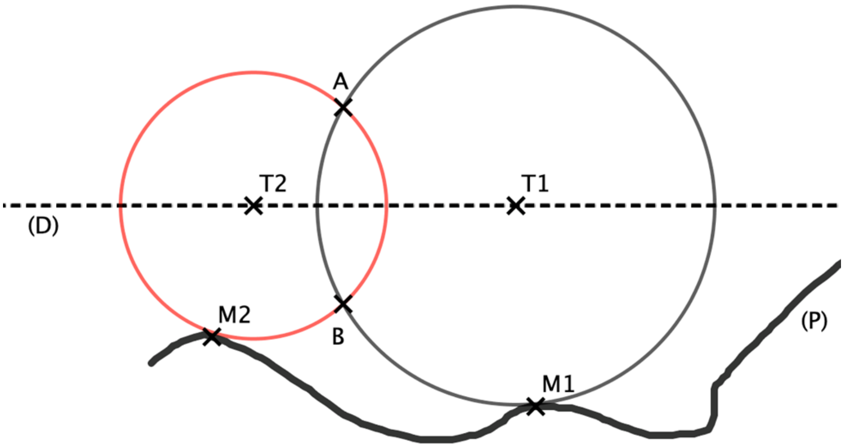
Fixons deux points T1 et T2 représentant les trous. On trace les deux cercles de centre T1 et T2 passant par A et B.



De même que dans 1), la plage doit toucher les deux cercles sans rentrer à l'intérieur.
Voici un exemple de plage qui répond à ces conditions :



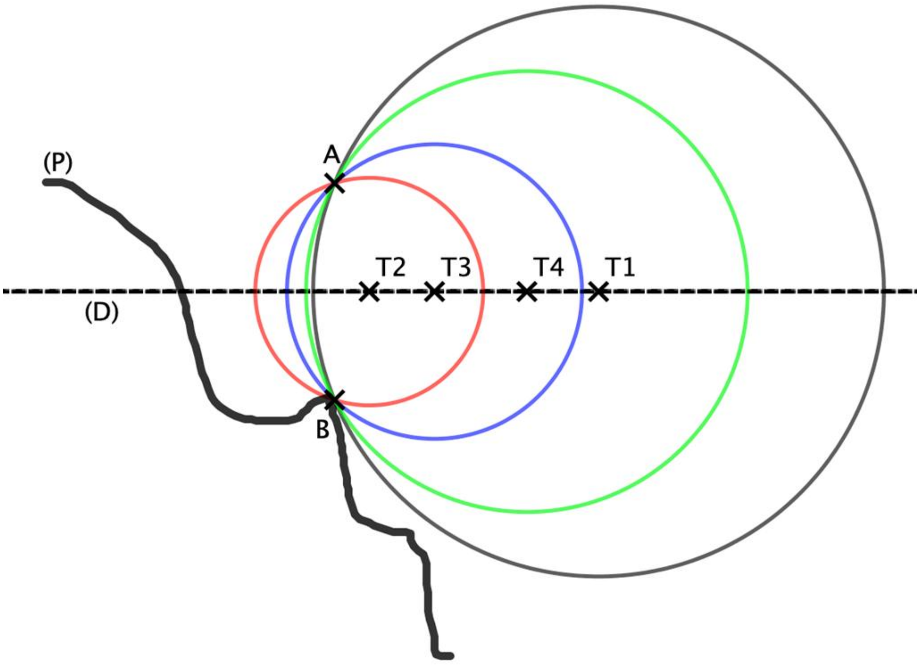
On a : T1A = T1B = T1M1 puisque T1,A et B sont sur un même cercle.
De même on a : T2A = T2B = T2M.
Voici un autre cas de figure ou les conditions pour la plage restent les mêmes :



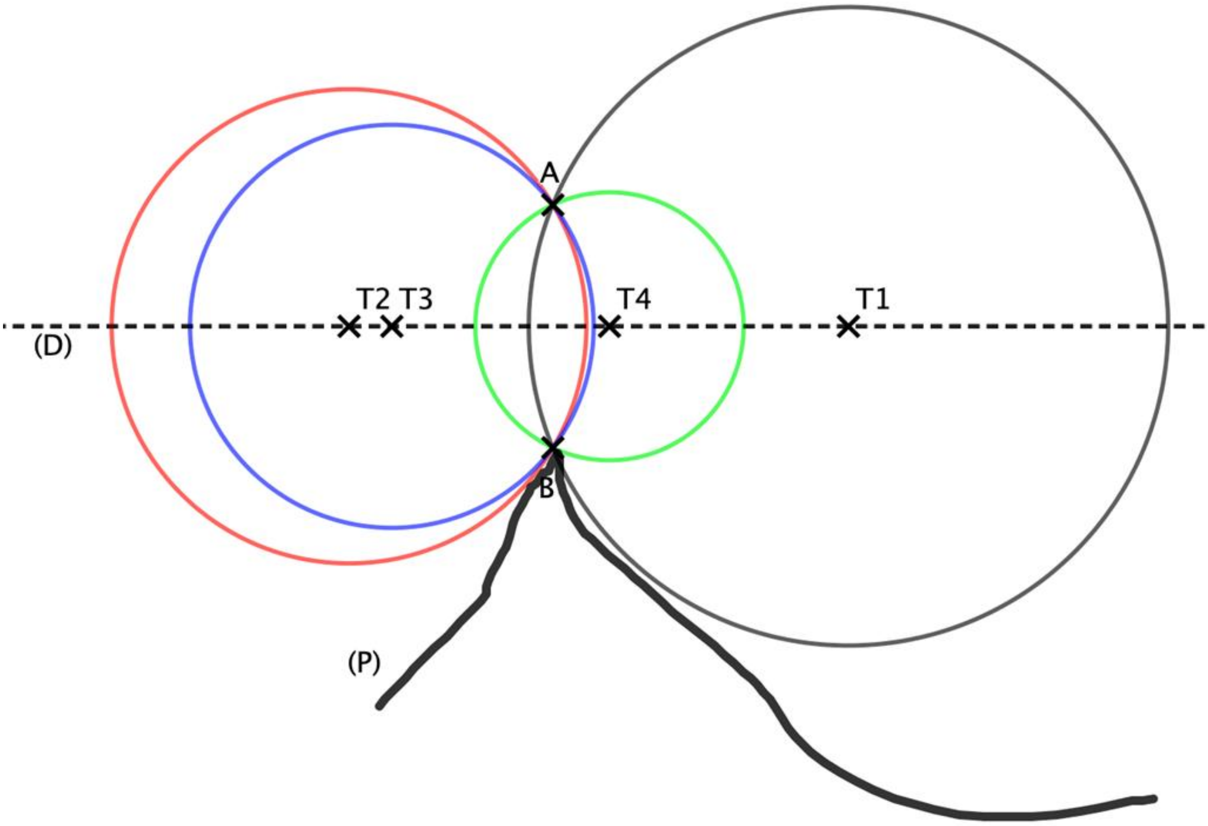
3) Trois trous ou plus

A partir de trois trous, il y a des cercles qui sont à l'intérieur soit du plus grand soit du plus petit. (5)

La plage qui doit toucher tous les cercles sans jamais rentrer à l'intérieur, passera forcément par A ou/et par B.



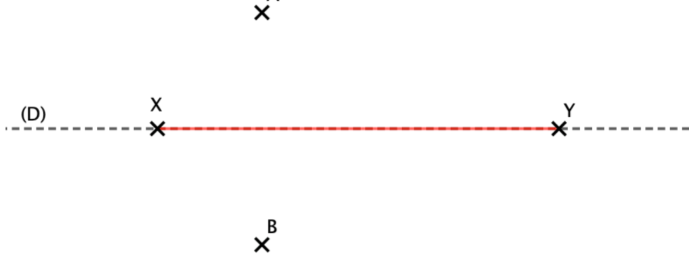
Ou encore cet exemple où des trous sont de chaque côté de (AB) : si on prend les cercles de plus grand rayon de chaque côté de (AB), ils contiennent tous les autres donc le raisonnement est le même. (6)



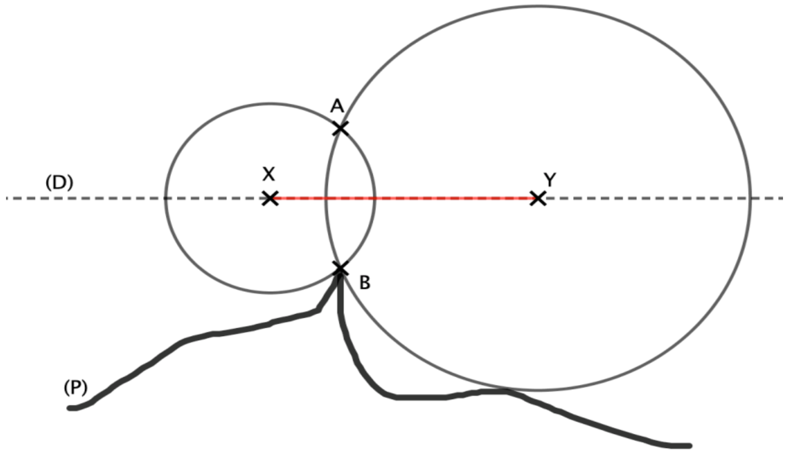
VI - Peut-il y avoir une infinité de trous à creuser ?

Deux cas de figures sont possibles : les trous à creuser, en nombre infini, appartiennent tous à un segment [XY] (ou une demi droite d'origine X ou Y) porté par (D) ou bien ils sont sur (D).

1) Les trous à creuser appartiennent tous à un segment [XY] porté par (D).

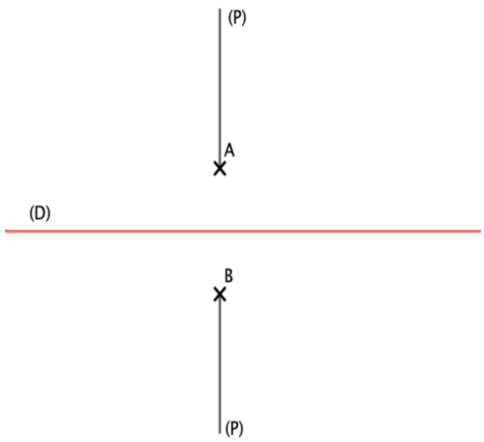


Nous avons un raisonnement similaire au V 3) : tous les cercles de centre les trous, passant par A et B seront à l'intérieur des cercles de centres X et Y. La plage devra donc passer par A ou/et B.



2) Les trous à creuser appartiennent à (D) et sont de chaque côté de (AB).

Dans ce cas, plus le centre s'éloigne de (AB) plus les cercles deviennent grands ; l'espace entre les cercles se réduit de plus en plus : la plage et l'île toute entière se réduisent à une ou deux demi-droites d'origines A ou/et B. (7)



Notes d'édition

(1) « Le segment passe au-dessus de la plage » . Il aurait fallu préciser ce qu'on entend par cela.

(2) Cela signifie : la distance TM est la longueur du plus court chemin ente T et (P)

(3) Il s'agit de la distance de chacun des arbres à un sommet du triangle

(4) Le nombre est-il toujours plus petit que 2 dans ce cas aussi ?

(5) Il y a des cercles qui sont contenus dans l'union des disques délimités par le plus petit et le plus grand cercle. Il peut y avoir des cercles qui ne sont pas contenus dans cette union.

(6) Les cercles sont contenus dans l'union des disques délimités par le cercle de centre X et celui de centre Y.

(7) Un cas non traité est celui où il y a une infinité de trésors possibles, tous sur une demi-droite supportée par (D) (mais contenus dans aucun segment) et tels que la demi-droite est contenue dans un seul des deux demi-plans délimités par (AB). Autrement dit « d'un seul côté de(AB) » ; cela aurait pu être évoqué, ou expliqué pourquoi ce cas-là n'apparaît pas.