

Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis ou des imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Dessin de Plage

2020-2021

Nom, prénom et niveaux des élèves : Timothé Kasriel et Luke Chu, Classe de Tle

Établissement : Lycée Français de San Francisco

Enseignants : Manuela Dikongué et Nicolas Legatelois

Chercheur : Gilles Bailly-Maitre, maître de conférence en mathématiques et directeur du département de mathématiques de l'Université de la Rochelle

Table des matières

1	Présentation du sujet	2
2	Forme de la courbe	2
2.1	Modélisation	4
2.1.1	Rotations de vecteurs	4
2.1.2	Formulation du L-système	5
2.2	L-système	6
2.2.1	Méthodes de génération de la fractale	6
2.2.2	Orientations des segments F et G	7
2.2.3	Nombre totale de virages	7
2.2.4	Le tour à une position k	9
3	Nombre de segments	10
3.1	Peut-on avoir superposition?	10
3.2	Conclusion	11
4	Taille du quadrillage minimale	11

5 Proportion du quadrillage rempli en termes de segments	12
5.1 Séparation du graphique	13
5.2 Parité et convergence	14
5.3 Limites	15
5.4 Conclusion	17

1 Présentation du sujet

On commence avec une feuille de papier que l'on pliera en deux. En dépliant la feuille tel qu'on laisse un angle droit sur chaque pli, on peut observer la tranche de la feuille et former notre première étape. On peut replier cette feuille et la plier une nouvelle fois dans la même direction afin d'obtenir l'étape suivante et ainsi de suite.

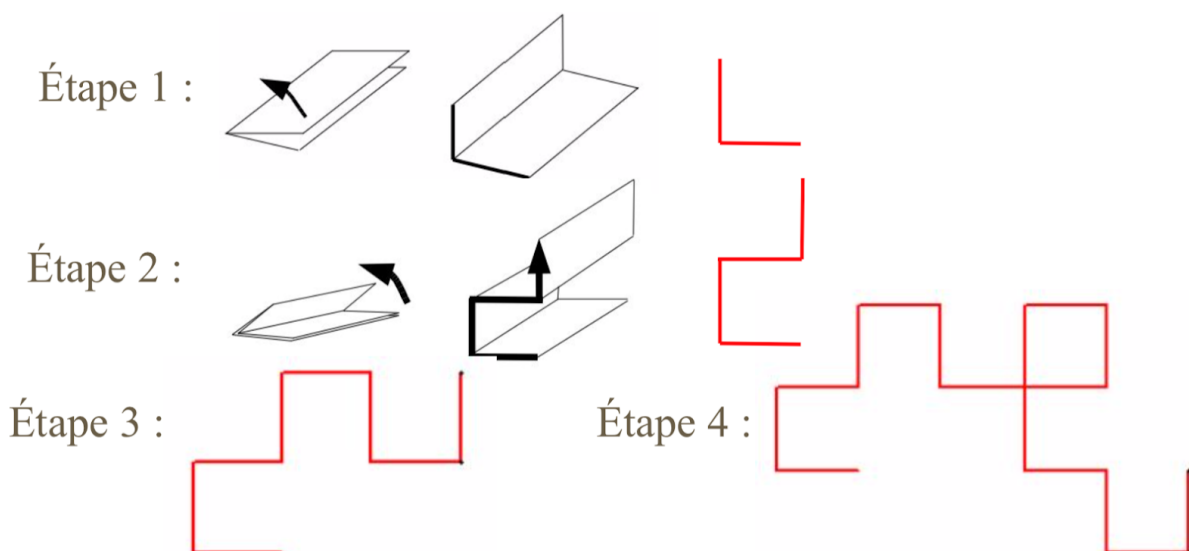


FIGURE 1 – Les premières étapes de la courbe formés par la tranche de la feuille

Dans ce papier, on cherchera avant tout :

1. Combien de segments comporte la courbe à l'étape n ?
2. Quel est la taille minimale du quadrillage qui peut contenir la courbe à l'étape n ?
3. Quelle proportion du quadrillage est remplie par la courbe?

2 Forme de la courbe

En utilisant un programme pour visualiser la courbe, on conjecture qu'elle a une forme de fractale.

Nous allons définir cette fractale avec un L-système.



FIGURE 2 – La forme de la courbe

2.1 Modélisation

2.1.1 Rotations de vecteurs

Pour arriver à une formulation d'un L-système pour décrire cette fractale, nous allons modéliser la transformation d'une étape à la suivante par des transformations de vecteurs.

On peut remarquer que pour obtenir l'étape suivante ($n + 1$), on ajoute à la courbe précédente (étape n) avec une rotation de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre. Cette rotation peut donc être modélisé par des rotations de vecteurs.

Soit le vecteur $\mathbf{f}_0(a, b)$ et le vecteur \mathbf{g}_0 défini par la rotation du vecteur \mathbf{f}_0 de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre. Ainsi :

$$\mathbf{f}_0(a, b) \text{ et } \mathbf{g}_0(-b, a)$$

Graphiquement, on a :

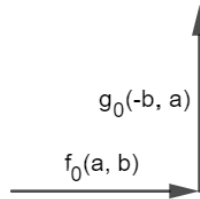


FIGURE 3 – Rotations de 90° de vecteurs

Cette figure ressemble à la courbe à l'étape $n = 1$.

Appelons \mathbf{f}_1 le vecteur décrivant le déplacement total de la courbe. Ainsi, à l'étape $n = 1$,

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_0 + \mathbf{g}_0$$

On remarquera que ce vecteur n'est que le vecteur originel, avec une rotation et un agrandissement d'un facteur de $\sqrt{2}$.

Regardons maintenant la courbe à l'étape $n = 2$.

Nous pouvons couper cette figure en deux parties. La première étant composée des deux premières segments et la deuxième composée de tout le reste. On notera que la forme de cette première partie est la même que celle dans la figure 3. On peut donc représenter le déplacement par le vecteur \mathbf{f}_1 .

Quant à la deuxième partie, on remarquera qu'elle est similaire à la figure 3 mais avec une rotation de 90° dans le sens opposé de l'aiguille d'une montre. On peut donc la définir comme étant :



FIGURE 4 – La courbe à l'étape $n = 2$

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{f}_0 - \mathbf{g}_0$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= \mathbf{f}_0 + \mathbf{g}_0 \\ \mathbf{g}_1 &= \mathbf{f}_0 - \mathbf{g}_0 \end{aligned} \tag{1}$$

Or, on peut répéter notre raisonnement à l'étape $n = 2$ pour toute étape n . Soit \mathbf{f}_n le vecteur \mathbf{f} à l'étape n et \mathbf{g}_n le vecteur \mathbf{g} à l'étape n . Pour arriver à l'étape suivante, on applique nos transformations des vecteurs \mathbf{f} et \mathbf{g} dans (1). Ainsi pour toute vecteur \mathbf{f}_n et \mathbf{g}_n , on peut écrire la transformation :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{n+1} &= \mathbf{f}_n + \mathbf{g}_n \\ \mathbf{g}_{n+1} &= \mathbf{f}_n - \mathbf{g}_n \end{aligned} \tag{2}$$

2.1.2 Formulation du L-système

Maintenant que nous avons nos transformations des vecteurs \mathbf{f} et \mathbf{g} sous forme généralisé, il est temps de formuler un L-système. D'après les transformations, le vecteur \mathbf{f} devient un vecteur \mathbf{f} , suivi d'un vecteur \mathbf{g} tourné de 90° . Le vecteur \mathbf{g} est identique mais tourné dans l'autre sens.

Il est important de noter que les vecteurs ne sont qu'une outil pour arriver à la formulation finale. On aurait pu écrire de manière équivalent $\mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{g}_n + \mathbf{f}_n$ mais on obtiendra une courbe différente. Mais si l'addition est commutative, l'ordre à une importance dans ce cas ci pour pouvoir mieux visualiser la courbe.

Ainsi on peut formuler le L-système avec F et G voulant dire avancer et "+" et "-" voulant dire tourner de 90° dans un sens ou dans l'autre :

$$\begin{aligned}
 &\text{Variables : } FG \\
 &\text{Constantes : } +- \\
 &\text{Axiome de départ : } F \\
 &\text{Règles : } (F \rightarrow F + G), (G \rightarrow F - G)
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

On aurait pu très bien écrire aussi le L-système suivant car les "+" et les "-" sont interchangeables.

$$\begin{aligned}
 &\text{Variables : } FG \\
 &\text{Constantes : } +- \\
 &\text{Axiome de départ : } F \\
 &\text{Règles : } (F \rightarrow F - G), (G \rightarrow F + G)
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Afin d'être consistant, nous allons utiliser le L-système défini dans (3) dans les analyses du L-système qui suivent.

2.2 L-système

On peut trouver quelques premières éléments du L-système :

- $n = 0 : F$
- $n = 1 : F + G$
- $n = 2 : F + G + F - G$
- $n = 3 : F + G + F - G + F + G - F - G$
- $n = 4 : F + G + F - G + F + G - F - G + F + G + F - G - F + G - F - G$

2.2.1 Méthodes de génération de la fractale

Avec notre formulation du L-système, on peut remarquer qu'il existe deux manières de générer la courbe.

La première consiste, comme on l'a vue précédemment, à ajouter la courbe précédente avec une rotation de 90° à la fin de la courbe existante à chaque itération. Cette méthode est la méthode itérative.

La deuxième, mise en évidence par notre L-système, consiste à transformer chaque segment en fonction de si celle-ci est F ou G par les sorties définis par les règles du L-système (figure 5). Cette méthode est la méthode récursive.

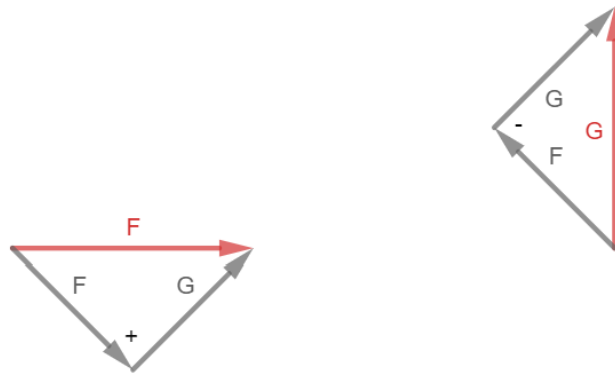


FIGURE 5 – Expansions des segments F et G

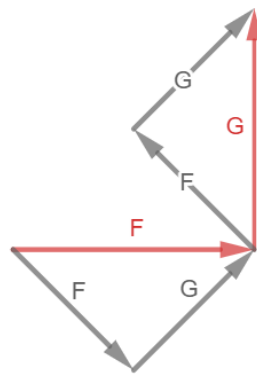


FIGURE 6 – Génération de l'étape $n = 2$ en fonction de l'étape $n = 1$ en utilisant la méthode récursive.

2.2.2 Orientations des segments F et G

Par construction, on voit que les segments F et G alternent. De plus, tous les segments sont séparés, soit par un "+", soit par un "-". Ainsi, tous les segments F ont la même direction qu'un axe et tous les segments G ont la même direction qu'un autre axe perpendiculaire à cette première. C'est à dire, n'importe quels segments F et G seront toujours perpendiculaires.

2.2.3 Nombre totale de virages

Si on ignore les F et les G dans les éléments ci-dessous, on obtiendra :

- $n = 0$: rien
- $n = 1$: +
- $n = 2$: ++-
- $n = 3$: ++-+-
- $n = 4$: ++-+-+--

On veut trouver le nombre totale de virages, c'est à dire, le nombre de fois la courbe tourne dans le sens " + " soustrait par le nombre de fois la courbe tourne dans le sens " - ". En regardant la liste, on peut conjecturer que cette valeur équivaut à 1, soit il y a toujours un " + " de plus que " - " pour tout entier $n \geq 1$.

Preuve. On associe à la suite (a_n) le nombre totale de tours de la courbe avec un axiome de départ $w = F$ à une étape n et à la suite (b_n) le nombre totale de tours de la courbe avec un axiome de départ $w = G$ à une étape n pour tout entier naturel $n \geq 1$.

D'après la définition de notre L-système, on peut voir qu'en fonction de la transformation appliqué ($F \rightarrow F + G$ ou $G \rightarrow F - G$), on va ajouter soit un " + " (si c'est un F au départ) ou un " - " (si c'est un G) au nombre totale de tours. Ainsi les valeurs de a_{n+1} et de b_{n+1} auront toujours un composant a_n et b_n .

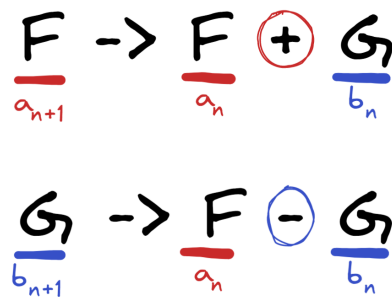


FIGURE 7 – Les suites (a_n) et (b_n)

Nous pouvons donc formuler les suites (a_n) et (b_n) .

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + b_n + 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} b_1 = -1 \\ b_{n+1} = a_n + b_n - 1 \end{cases} \quad (6)$$

Supposant que l'axiome de départ est $w = F$, le nombre totale de tours est alors égale à a_n . Nous allons maintenant utiliser un raisonnement par récurrence pour prouver que $a_n = 1$.

Soit la propriété $P(n) : "a_n = 1 \text{ et } b_n = -1"$.

Initialisation :

On vérifie que $P(1)$ est vraie. Par définition, $a_1 = 1$ et $b_1 = -1$ donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité :

On suppose qu'il existe un entier $k \geq 1$ pour laquelle $P(k)$ est vraie, soit $a_k = 1$ et $b_k = -1$.
On veut alors montrer que $P(k+1)$ est vraie, soit $a_{k+1} = 1$ et $b_{k+1} = -1$.

Par hypothèse de récurrence, $a_k = 1$ et $b_k = -1$.

Pour a_{k+1} :

$$\begin{aligned} a_k &= 1 \\ (a_k + b_k + 1) &= 1 + b_k + 1 \\ a_{k+1} &= 1 - 1 + 1 \\ a_{k+1} &= 1 \end{aligned}$$

Pour b_{k+1} :

$$\begin{aligned} b_k &= -1 \\ (a_k + b_k - 1) &= a_k - 1 - 1 \\ b_{k+1} &= 1 - 1 - 1 \\ b_{k+1} &= -1 \end{aligned}$$

$P(k+1)$ est donc vraie.

Conclusion :

La propriété $P(1)$ est vraie et P est héréditaire. La propriété $P(n)$ est donc vraie pour tout entier $n \geq 1$, soit $a_n = 1$.

Preuve alternative. On observe que par construction, on a toujours autant de F que de G (sauf à l'étape 0 car on commence par F seul ou G seul). Donc à chaque nouvelle étape, on ajoute autant de "+" que de "-". Finalement, on a pour tout entier $n \geq 1$, $a_n = a_1 = 1$ et $b_n = b_1 = -1$.

2.2.4 Le tour à une position k

Si on donne une étape n arbitrairement grand, on obtiendra une liste de tours comme :

+ + - + + - - + + + - - + - - ...

Soit la fonction $tour(k)$ qui donne le tour (" + " ou " - ") à la position k . Nous pouvons conjecturer que :

$$\begin{aligned}tour(2k) &= tour(k) \\tour(2k + 1) &= (-1)^k\end{aligned}\tag{7}$$

où 1 est équivalent à un " + " et -1 à un " - ".

3 Nombre de segments

Nous allons définir un segment comme un élément "F" ou "G" dans notre L-système, c'est à dire un moment où on ne change pas de direction.

Par exemple, à l'itération $n = 0$, il y a une seule segment. À l'itération $n = 1$ (Voir figure 3), il y a deux segments.

On remarquera que lorsqu'on plie la feuille, on double la taille de la courbe. Ainsi, on double le nombre de segments à chaque itération de notre suite. Soit (u_n) la suite représentant le nombre de segments à l'étape n . On peut donc définir la suite (u_n) par :

$$\begin{cases}u_0 = 1 \\u_{n+1} = 2u_n\end{cases}$$

Ou explicitement par :

$$u_n = 2^n$$

De plus, ceci est aussi mise en évidence par le L-système défini précédemment. On peut remarquer que pour les deux règles du L-système ($F \rightarrow F - G$ et $G \rightarrow F + G$), chaque segment en entrée produit deux segments en sortie.

3.1 Peut-on avoir superposition?

Cependant, ceci est à condition qu'on ne peut pas avoir une superposition de plusieurs segments. C'est à dire, on ne peut pas avoir deux segments qui occupent la même position. À partir de la visualisation graphique de la courbe, on peut conjecturer que ceci est bien impossible.

Preuve. Considérez une grille complètement remplie de F et de G . La courbe à n'importe qu'elle étape n appartient à l'ensemble de cette grille. En utilisant la méthode récursive vue dans la partie méthodes de génération de la fractale, on obtiendra toujours une grille complètement remplie. Ainsi pour avoir une superposition, il faut avoir une superposition à l'étape initiale ce qui n'est pas le cas. Il est donc impossible d'avoir une superposition à n'importe étape n .

3.2 Conclusion

Nous avons prouvées qu'il est impossible pour que deux segments se superposent. Le nombre de segments est donc bien :

$$u_n = 2^n$$

4 Taille du quadrillage minimale

On définit la taille du quadrillage minimale de la courbe à une étape n par les dimensions x et y de la grille la plus petite contenant la courbe.

Un motif qui se répète est cependant bien présent. Grâce à un programme, nous avons compilé le tableau ci-dessous.

| n | x_n | y_n |
|-----|-------|-------|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 |
| 3 | 3 | 2 |
| 4 | 5 | 3 |
| 5 | 6 | 7 |
| 6 | 7 | 11 |
| 7 | 15 | 12 |
| 8 | 23 | 15 |
| 9 | 26 | 31 |
| 10 | 31 | 47 |
| 11 | 63 | 52 |
| 12 | 95 | 63 |
| 13 | 106 | 127 |

On peut conjecturer que :

$$x_n = \begin{cases} 4(x_{n-4} + 1) - 1 & \text{si } n = 4k \\ 4x_{n-4} + 2 & \text{si } n = 4k + 1 \\ 4(x_{n-4} + 1) - 1 & \text{si } n = 4k + 2 \\ 4(x_{n-4} + 1) - 1 & \text{si } n = 4k + 3 \end{cases} = \begin{cases} 4x_{n-4} + 3 & \text{si } n = 4k \\ 4x_{n-4} + 2 & \text{si } n = 4k + 1 \\ 4x_{n-4} + 3 & \text{si } n = 4k + 2 \\ 4x_{n-4} + 3 & \text{si } n = 4k + 3 \end{cases} \quad (8)$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 3 \quad x_4 = 5$$

$$y_n = \begin{cases} 4(y_{n-4} + 1) - 1 & \text{si } n = 4k \\ 4(y_{n-4} + 1) - 1 & \text{si } n = 4k + 1 \\ 4(y_{n-4} + 1) - 1 & \text{si } n = 4k + 2 \\ 4y_{n-4} + 4 & \text{si } n = 4k + 3 \end{cases} = \begin{cases} 4y_{n-4} + 3 & \text{si } n = 4k \\ 4y_{n-4} + 3 & \text{si } n = 4k + 1 \\ 4y_{n-4} + 3 & \text{si } n = 4k + 2 \\ 4y_{n-4} + 4 & \text{si } n = 4k + 3 \end{cases} \quad (9)$$

$$y_1 = 1 \quad y_2 = 2 \quad y_3 = 2 \quad y_4 = 3$$

On va maintenant pouvoir mettre tout ça sous forme explicite :

$$x_n = \begin{cases} \frac{3}{2}(4^k) - 1 & \text{si } n = 4k \\ \frac{5}{3}(4^k) - \frac{2}{3} & \text{si } n = 4k + 1 \\ 2(4^k) - 1 & \text{si } n = 4k + 2 \\ 4^{k-1} - 1 & \text{si } n = 4k + 3 \end{cases} \quad (10)$$

$$y_n = \begin{cases} 4^k - 1 & \text{si } n = 4k \\ 2(4^k) - 1 & \text{si } n = 4k + 1 \\ 3(4^k) - 1 & \text{si } n = 4k + 2 \\ \frac{10}{3}(4^k) - \frac{4}{3} & \text{si } n = 4k + 3 \end{cases} \quad (11)$$

Malheureusement, nous n'avons pas pu prouver cette conjecture.

5 Proportion du quadrillage rempli en termes de segments

Soit (p_n) la proportion du quadrillage rempli par la courbe en termes de segments. On définit la proportion du quadrillage rempli par la courbe en termes de segments, (p_n) par :

$$p_n = \frac{u_n}{s_n}$$

où s_n est le nombre de segments de la grille minimale à l'étape n et u_n le nombre de segments de la courbe à l'étape n .

On peut exprimer s_n par :

$$\begin{aligned} s_n &= y_n(x_n + 1) + x_n(y_n + 1) \\ &= 2x_n y_n + x_n + y_n \end{aligned}$$

et u_n (comme on l'a vu dans nombre de segments) par :

$$u_n = 2^n$$

On cherche la proportion du quadrillage rempli par la courbe quand le nombre d'étapes n tends vers $+\infty$, soit la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

Afin de conjecturer sur la limite de la suite (p_n) , nous avons tracé la courbe de (p_n) en fonction de n .

La courbe semble diverger, et donc on pourrait conjecturer qu'il n'y a pas de limite quand n tend vers $+\infty$. Cependant, on peut séparer notre graphique en deux cas.

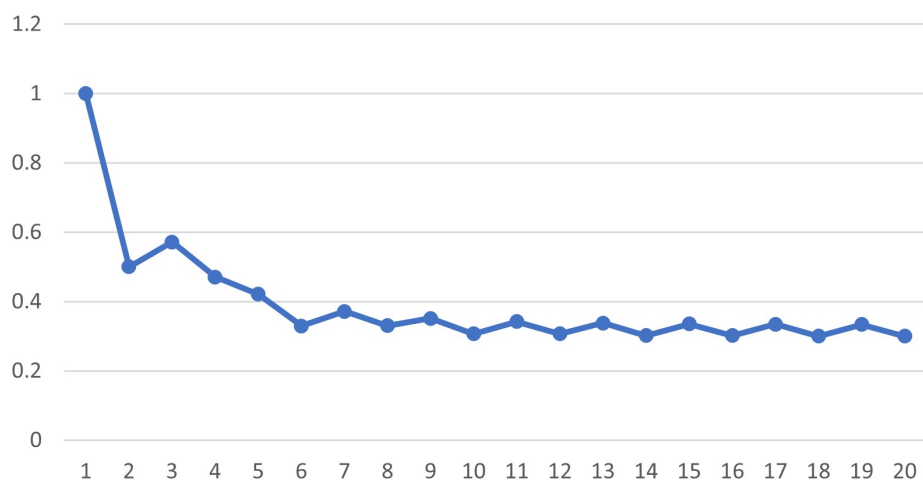


FIGURE 8 – Proportion du quadrillage rempli

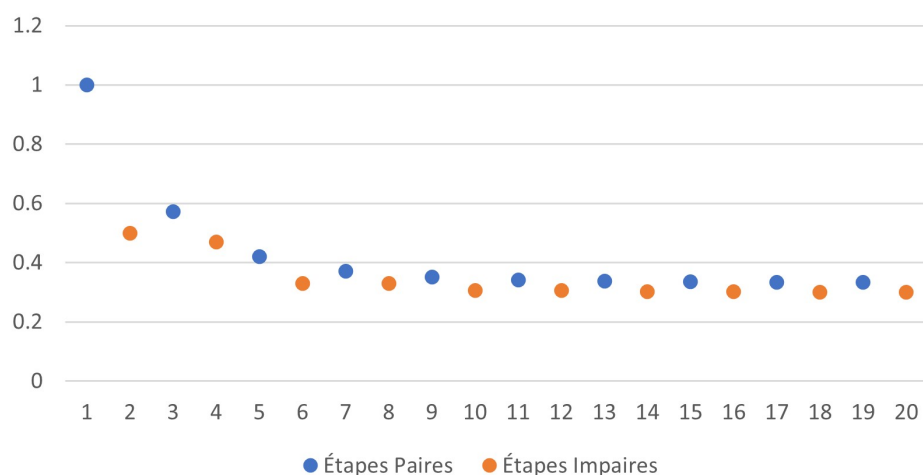


FIGURE 9 – Séparation des étapes paires et impaires

5.1 Séparation du graphique

On peut séparer notre courbes en des étapes paires et impaires, ce qui nous donnera ce graphique ci-dessous.

On remarquera que les deux nouvelles courbes semblent chacune approcher une seule valeur, et donc on pourrait établir une conjecture qu'elles sont convergentes.

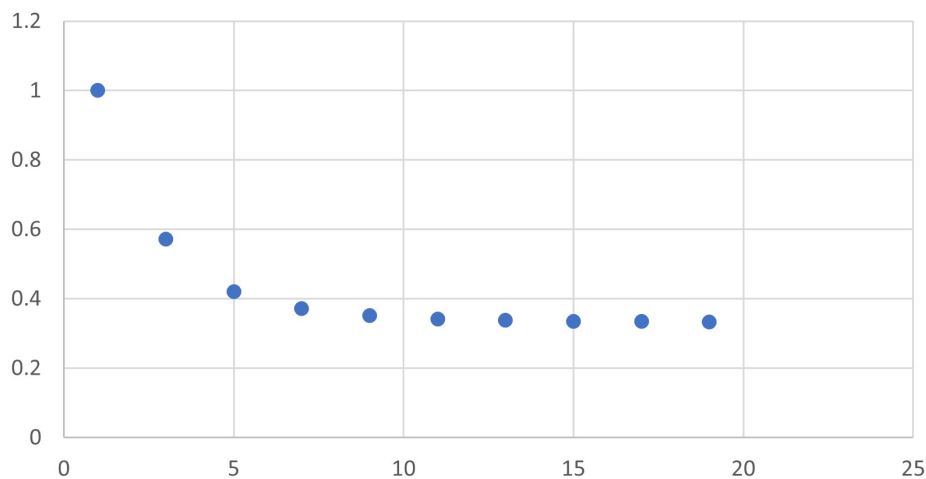


FIGURE 10 – Proportion du quadrillage rempli (étapes paires)

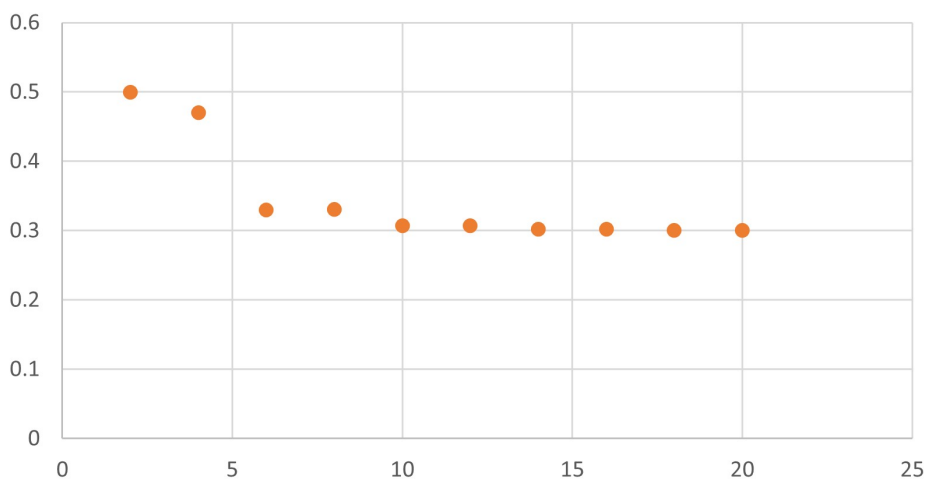


FIGURE 11 – Proportion du quadrillage rempli (étapes impaires)

5.2 Parité et convergence

En observant le graphique des étapes paires, on peut voir que la proportion du quadrillage semble approcher $\frac{1}{3}$. On peut donc établir la conjecture que cette courbe converge vers $\frac{1}{3}$.

De même, pour le graphique des étapes impaires, on peut voir que la proportion du quadrillage semble approcher $\frac{3}{10}$. On peut donc établir la conjecture que cette courbe converge vers $\frac{3}{10}$.

5.3 Limites

D'après les graphiques, on peut conjecturer que :

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{2n} &= \frac{1}{3} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} p_{2n+1} &= \frac{3}{10}\end{aligned}\tag{12}$$

Explication. À partir de la définition de (p_n) :

$$\begin{aligned}p_n &= \frac{u_n}{s_n} \\ &= \frac{2^n}{2x_n y_n + x_n + y_n}\end{aligned}$$

Substituant les expressions pour x_n et y_n (équations (10) et (11)) :

Cas $n = 4k$:

$$\begin{aligned}p_{4k} &= \frac{2^{4k}}{2\left(\frac{3}{2}(4^k) - 1\right)(4^k - 1) + \frac{3}{2}(4^k) - 1 + 4^k - 1} \\ &= \frac{4^{2k}}{(3(4^k) - 2)(4^k - 1) + \frac{5}{2}(4^k) - 2} \\ &= \frac{4^{2k}}{3(4^{2k}) - 3(4^k) - 2(4^k) + 2 + \frac{5}{2}(4^k) - 2} \\ &= \frac{4^{2k}}{3(4^{2k}) - \frac{5}{2}(4^k)} \\ &= \frac{1}{3 - \frac{5}{2(4^k)}}\end{aligned}$$

Donc :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} p_{4k} = \frac{1}{3}$$

Cas $n = 4k + 1$:

$$\begin{aligned} p_{4k+1} &= \frac{2^{4k+1}}{2\left(\frac{5}{3}(4^k) - \frac{2}{3}\right)(2(4^k) - 1) + \frac{5}{3}(4^k) - \frac{2}{3} + 2(4^k) - 1} \\ &= \frac{2^{4k} \cdot 2}{\left(\frac{10}{3}(4^k) - \frac{4}{3}\right)(2(4^k) - 1) + \frac{11}{3}(4^k) - \frac{5}{3}} \\ &= \frac{4^{2k} \cdot 2}{\frac{20}{3}(4^{2k}) - \frac{10}{3}(4^k) - \frac{8}{3}(4^k) + \frac{4}{3} + \frac{11}{3}(4^k) - \frac{5}{3}} \\ &= \frac{4^{2k} \cdot 2}{\frac{20}{3}(4^{2k}) - \frac{7}{3}(4^k) - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{2}{\frac{20}{3} - \frac{7}{3(4^k)} - \frac{1}{3(4^{2k})}} \end{aligned}$$

Donc :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} p_{4k+1} = \frac{3}{10}$$

Cas $n = 4k + 2$:

$$\begin{aligned} p_{4k+2} &= \frac{2^{4k+2}}{2(2(4^k) - 1)(3(4^k) - 1) + 2(4^k) - 1 + 3(4^k) - 1} \\ &= \frac{4^{2k} \cdot 4}{(4(4^k) - 2)(3(4^k) - 1) + 5(4^k) - 2} \\ &= \frac{4^{2k} \cdot 4}{12(4^{2k}) - 4(4^k) - 6(4^k) + 2 + 5(4^k) - 2} \\ &= \frac{4^{2k} \cdot 4}{12(4^{2k}) - 5(4^k)} \\ &= \frac{4}{12 - \frac{5}{4^k}} \end{aligned}$$

Donc :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} p_{4k+2} = \frac{1}{3}$$

Cas $n = 4k + 3$:

$$\begin{aligned}
 p_{4k+3} &= \frac{2^{4k+3}}{2(4^{k-1} - 1)\left(\frac{10}{3}(4^k) - \frac{4}{3}\right) + 4^{k-1} - 1 + \frac{10}{3}(4^n) - \frac{4}{3}} \\
 &= \frac{2^{4k} \cdot 8}{(8(4^k) - 2)\left(\frac{10}{3}(4^k) - \frac{4}{3}\right) + \frac{22}{3}(4^n) - \frac{7}{3}} \\
 &= \frac{4^{2k} \cdot 8}{\frac{80}{3}(4^{2k}) - \frac{32}{3}(4^k) - \frac{20}{3}(4^k) + \frac{8}{3} + \frac{22}{3}(4^k) - \frac{7}{3}} \\
 &= \frac{4^{2k} \cdot 8}{\frac{80}{3}(4^{2k}) - \frac{30}{3}(4^k) + \frac{1}{3}} \\
 &= \frac{8}{\frac{80}{3} - \frac{30}{3(4^k)} + \frac{1}{3(4^{2k})}}
 \end{aligned}$$

Donc :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} p_{4k+3} = \frac{3}{10}$$

Ainsi nous pouvons conjecturer que :

$$\begin{aligned}
 \lim_{k \rightarrow +\infty} p_{4k} &= \frac{1}{3} \\
 \lim_{k \rightarrow +\infty} p_{4k+1} &= \frac{3}{10} \\
 \lim_{k \rightarrow +\infty} p_{4k+2} &= \frac{1}{3} \\
 \lim_{k \rightarrow +\infty} p_{4k+3} &= \frac{3}{10}
 \end{aligned}$$

Soit, sous la forme de notre conjecture originale (équation (12)) :

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} p_{2n} &= \frac{1}{3} \\
 \lim_{n \rightarrow +\infty} p_{2n+1} &= \frac{3}{10}
 \end{aligned}$$

5.4 Conclusion

Ainsi, on peut conclure que cette courbe est une fractale, avec un L-système défini par :

Variabes : FG

Constantes : $+-$

Axiome de départ : F

Règles : $(F \rightarrow F + G), (G \rightarrow F - G)$

À l'étape n , notre courbe aura 2^n segments, et aucune superposition. On pourra conjecturer que la proportion du graphique appartenant à la courbe approchera $\frac{1}{3}$ lorsque l'étape n est un nombre pair, et $\frac{3}{10}$ lorsque l'étape n est un nombre impair.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{2n} = \frac{1}{3}$$
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{2n+1} = \frac{3}{10}$$